أسس المنطق الرمزى

تأليف

الدكتور عزمى إسلام

١٩٧٠

ملتزم الطبع والنشر
مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ شارع محمد فريد - القاهرة

إهـــــــداء٢٠٠٧
الأستاذ الدكتور / قدري محمود حفني
جمهورية مصر العربية

أسس المنطق الرمزي

تأليف

الدكتور عزمي إسلام

١٩٧٠

ملتزم الطبع والنشر
مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ شارع محمد فريد - القاهرة

الإهداء

إلى الاستاذ الدكتور زكى نجيب محمود

فهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

غرضنا من هذا الكتاب ، تقديم المنطق الرمزى إلى القارئ العربى فى صورة مبسطة ، عن طريق توضيح أسسه وأهم مفاهيمه . ونود فى هذه المقدمة أن ننوه بأن هدفنا من هذا الكتاب لم يكن هو تقديم عرض مفصل لتاريخ المنطق الرمزى المعاصر ، بوضع الإضافات المستمرة التى أضافها المناطقة واحد بعد الآخر . فهذا غرض يخرج عن مجال كتاب يعرض لأسس المنطق الرمزى . ولقد اكتفينا فى هذا الصدد بالإشارات التاريخية التى أوردناها فى الفصل الأول وكذا فى هوامش بعض الصفحات .

كما أننا لم نهدف من هذا الكتاب إلى تقديم عرض كامل للنظرية العامة للاستدلال فى ضوء المنطق الرمزى ، إذ أن هذه دراسة تبدأ على مستوى يتلو مستوى التعرف على أسس المنطق الرمزى ، وهو المستوى الذى وضع كتابنا الحالى لتبسيطه وتحليله . ولقد اكتفينا بذكر بعض أنواع الاستدلالات الخاصة بكل موضوع من موضوعات المنطق الرمزى الرئيسية ، ثم عقبنا على كل موضوع منها ، بذكر أهم الاستدلالات المتعلقة به . كما أنه من الطبيعى ألا يكون هدفنا من هذا الكتاب تقديم عرض للمنطق الصورى القديم ، وقد اكتفينا فى الفصل الأول بذكر أهم ما وجه من نقد للمنطق التقليدى ، وذلك تمهيداً لتوضيح حاجة الفكر المنطقى إما إلى إصلاح المنطق القديم ، أو لاصطناع منطق آخر جديد خالٍ من تلك النقائص والعيوب التى تم الكشف عنها فى المنطق القديم .

ولقد قسمنا الكتاب إلى خمسة فصول ، أولها بمثابة المدخل أو التمهيد للمنطق الرمزى ، تناولنا فيه موضوع المنطق ، وكذا عيوب المنطق القديم ، ثم عرضنا فيه

للمنطق الرمزى ، من حيث تعريفه ، ومبررات ظهوره وتطوره .

أما الفصول الأربعة الباقية ، فقد خصصنا كل واحد منها لقسم من أقسام المنطق الرمزى ، وهى على الترتيب :ـ

١ ـــ الحساب التحليلى للفئات .

٢ ـــ الحساب التحليلى للقضايا .

٣ ـــ الحساب التحليلى لدالات القضايا .

٤ ـــ الحساب التحليلى للعلاقات .

حقاً إن العادة قد جرت على تقسيم موضوعات المنطق الرمزى إلى ثلاثة أقسام هى (حساب القضايا ، وحساب الفئات ، وحساب العلاقات) ، وذلك على النحو الذى أورده رسل فى كتابه « أصول الرياضيات » (الجزء الأول ، صفحة ١٣) . إلا أننى قد فضلت فى هذا الكتاب أن أخصص للحساب التحليلى لدالات القضايا فصلا مستقلا ، بغرض زيادة التبسيط والتوضيح ، وهو الهدف الذى حاولت الالتزام به قدر استطاعتى على طول هذا الكتاب ، وأرجو أن أكون قد وفقت فى بلوغه .

عزمى اسلام

الفصل الاول

مدخل إلى المنطق الرمزى

موضوع علم المنطق :

موضوع المنطق هو الأستدلال ، حتى ليعرفه بعض المناطقة أحيانا بأنه « علم الأستدلال » . والأستدلال عادة ما يكون على صدق أو كذب قول أو قضية ، بناء على صدق أو كذب قضية أو قضايا أخرى تعتبر بمثابة المقدمة ، أو المقدمات ، للقضية المعنية . وللاستدلال فى المنطق قواعد تتبع حتى يكون صحيحاً Valid ، وإلا كان باطلا غير صحيح .

والأستدلال فى المنطق التقليدى يدور أساساً حول القياس ، وهو نوع من الأستدلال غير المباشر الذى يبدأ بمقدمتين منتهيا إلى نتيجة تتبين صدقها ، بناء على لزومها لزوما ضرورياً عن المقدمتين اللتين إفترضنا صدقهما ، وذلك وفقاً لقواعد معينة تعرف بقواعد القياس . وبما أن الأستدلال عملية عقلية ، فقد جرت العادة على تعريف المنطق التقليدى بأنه علم التفكير الصحيح ، أياً كان الموضوع الذى يتم حوله التفكير . ومن ثم فقد قيل أنه « العلم الذى يبحث فى صورة الفكر » . وصورة الفكر هى القالب أو الأطار الذى تترابط فيه التصورات والأفكار وفقاً لعلاقات معينة ، بغض النظر عن مضمون تلك التصورات نفسها .

وعلى ذلك يمكن القول :

١ — بأن موضوع المنطق التقليدى ، كان هو الاستدلال بعامة ، والأستدلال القياسى بخاصة .

٣ — وبأن الصورية هي السمة الأساسية التي يتسم بها هذا المنطق .

نقـد المنطق القديم :

ظلت السيادة معقودة للمنطق الأرسطي بعنله التقليدى ، على الفكر الإنسانى ما يزيد على ألفى عام ، باعتبارة الأداة الوحيدة لكل تفكير صحيح . إلى أن تبيّن المناطقة والمفكرين أن القياس ، وهو المحور الأساسى الذى يقوم عليه الاستدلال فى المنطق القديم ، به من العيوب والنقائص ما يبرر التخلى عنه أساساً للتفكير الأستدلالى . كما تبين لهم أن الصورية ، ليست هى السمة المعبرة تعبيراً كاملا وحقيقياً عن طبيعة المنطق القديم . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى :—

أولا : نقد القياس :

ترتب على أكتشاف العديد من النقائص والعيوب فى القياس ، أن رفضه كثير من المناطقة والعلماء والفلاسفة ، وجاء رفضهم هذا معبراً عن إتجاهين :—

(ا) إتجاه علمى يرى فى القياس ، بل وفى المنطق التقليدى كله ، أداة عاجزة عن تطوير العلم .ولقد بدأ هذا الاتجاه بمحاولات روجر بيكون Roger Bacon (+ ١٢٩٤) فى القرن الثالث عشر ، ثم تمثل بصفة خاصة فى نقد فرانسيس بيكون F. Bacon (+ ١٦٢٦) فى القرن السابع عشر ، للمنطق التقليدى ، وذلك فى كتابه « الأورجانون الجديد » Novum Organum الذى نشر عام ١٦٢٠ ، والذى ذهب فيه بيكون إلى القول بأن (المنطق الموجود لدينا الان لايساعدنا على التوصل إلى علوم جديدة أو إلى الكشف عنها)[١] ، بل وإلى أكثر من هذا ، فهو لم يكن يرى فى المنطق القديم مجرد أداة عقيمة غير مثمرة فى التفكير العلمى ،

---

(١) Bacon, F.: Novum Organum, ch. XI.

بل كان يراه أيضاً عقبة كأداء فى طريق تقدم العلم وذلك بتثبيته للأخطاء التى تعود عليها الفكر . ويتمثل هذا المعنى فى قوله : (إن المنطق المستخدم الان إنما يساعد على تثبيت ورسوخ الأخطاء التى ترجع فى أساسها إلى أفكار شائعة تزودنا بها من قبل ، أكثر مما يساعد على الكشف عن الصدق والحق . ولذا كان ضرره أكثر من نفعه)(١) .

(ب) إتجاه منطقى يرى فى القياس أداة عاجزة عن تحقيق التفكير المنطقى السليم أو إستيفاء الأستدلالات المنطقية الصحيحة بصفة عامة ، وغير القياسية بصفة خاصة . ويمكن تلخيص أهم ما وجه من نقــد فى هـــذا الصدد إلى القياس على النحو الآتى :—

١ — من حيث التعريف : يعرف أرسطو القياس فى كتابه التحليلات الأولى بأنه كل قول قدم له بمقدمات معينة ، فلزم عنها بالضرورة شىء غير تلك المقدمات ومعنى ذلك إننا نستطيع الأستنتاج من أكثر من مقدمة . إلا أنه يجعل عـــدد المقدمات مقصوراً على إثنتين فقط أثناء تطبيقه لنظرية القياس ، فيرى أنه مكون من مقدمتين ونتيجة . وعلى ذلك فإن تعريف القياس عنـد أرسطو — على حـد تعبير جوزيف (٢) — أوسع من تطبيقه ، بمعنى أنه لا يلتزم أثناء التطبيق ، بما إفترضه أثناء التعريف . (٣)

---

(١) Ibid. ch. XII.

(٢) Joseph, H.W.: An Introduction to Logic. P. 248

(٣) ولقد سبق المفكر العربى ابن تيمية (١٢٦٣ — ١٣٢٨ م) إلى القول بمثل هذا النقد وإلى غيره فى كتابه « الرد على المنطقيين » . انظر فى هــذا الدراسة التى نشرها مؤلف هذا الكتاب بعنوان « ابن تيمية والرد على المنطق الأرسطى » بمجلة الكاتب ، العدد ٩٧ ، إبريل ١٩٦٩ .

٢ — من حيث عدد المقدمات : يرى أرسطو أن القياس يتكون من مقدمتين ونتيجة في حين أن الاقتصار على مقدمتين فقط لا يوجد ما يبرره في عملية الاستدلال. وفي هذا الصدد يقول المفكر العربي ابن تيمية : (وأما قولهم « أن الأستدلال لا بد فيه من مقدمتين بلا زيادة ولا نقصان » ، فهو قول باطل طردا وعكسا ، وذلك أن إحتياج المستدل إلى المقدمات مما يختلف فيه حال الناس . فمن الناس من لا يحتاج إلا إلى مقدمة واحدة لعلمه بما سوى ذلك . . . ومنهم من يحتاج إلى مقدمتين . . . أو أكثر)(١) ، وعلى ذلك (فتخصيص العدد باثنين دون ما زاد تحكم لا معنى له)(٢) أو هو (قول لا دليل عليه ، بل هو باطل) . (٣)

٣ — من حيث تصنيف المقدمتين إلى كبرى وصغرى : يرى دعاة المنطق التقليدى ضرورة أن تكون إحدى المقدمتين كبرى والأخرى صغرى ، في حين أننا نستطيع أن نستنتج نتيجة صحيحة من مقدمتين متساويتين ليست فيهما ما هي كبرى ولا ماهي صغرى ، (٤) مثل : ا = ب ، ب = حـ ∴ ا = حـ .

٤ — من حيث العلاقة التي تربط بين حدود القياس : فالقياس التقليدى كان يقوم على قضايا حملية تتكون من موضوع ومحمول ، يرتبطان بعلاقة التضمن أو الأشتمال ، بحيث يكون المحمول مشتملا على الموضوع ومتضمنا له ، ويكون الموضوع مندرجا تحت المحمول منتميا إليه . وهذا من شأنه — على حد تعبير رسل — أن يضيق من مجال الأستدلال فيجعله قائما على أساس هذا النوع من العلاقة ، في حين

---

(١) ابن تيمية : الرد على المنطقيين صفحة ١٦٨ .

(٢) المرجع السابق . صفحة ١٧٥ .

(٣) المرجع السابق . صفحة ١٦٢ .

(٤) د. زكي نجيب محمود : المنطق الوضعى . الجزء الأول . صفحة ٢٤٨ .

إن هناك أنواعاً كثيرة من العلاقات التي يمكن أن تربط بين حدود القضية، كالعلاقات الزمانية أو المكانية أو غير ذلك .

٥ — من حيث الكم في قضايا القياس: يحدد المنطق التقليدي كم قضايا القياس، بناء على كم الموضوع مع إغفال كم المحمول ، وهو بهذا يجعل القضايا المستخدمة في القياس مقصورة على المحصورات الأربع (الكلية الموجبة والكلية السالبة ، والجزئية الموجبة والجزئية السالبة) ، في حين أننا نستطيع — كما يرى وليم هاملتون — أن نبدأ من ثمان قضايا أساسية بدلا من أربع . وهذا يتيح لنا أن نستنتج عدداً أكبر من النتائج التي قد نتوصل إليها لو إقتصرنا على القضايا الأربع التقليدية . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي :—(١)

١ — قضية كل كلية موجبة : كل ا هي كل ب ، ويرمز لها بالرمز : U

٢ — قضية كل جزئية موجبة : كل ا هي بعض ب، » » » A

٣ — قضية كل كلية سالبة : لا ا هي أي ب ، » » » E

٤ — قضية كل جزئية سالبة : لا ا هي بعض ب ، » » » η

٥ — قضية جزء كلية موجبة : بعض ا هي كل ب ، » » » y

٦ — قضية جزء جزئية موجبة: بعض ا هي بعض ب، » » » I

٧ — قضية جزء كلية سالبة : بعض ا ليس أي ب ، » » » O

٨ — قضية جزء جزئية سالبة: بعض ا ليس بعض ب، » » » ω

٦ — من حيث جدوى القياس وفائدته : فالقياس بمعناه التقليدي لا يضيف إلى معرفتنا معرفة جديدة بل يكرر في النتيجة ما كنا نعرفه من قبل في المقدمات ،

(١) Kotarbinski. T. : Lessons sur l'Histoire de la Logique P. 145

ولذا فهو فى حقيقته مجرد تحصيل حاصل . ولقد كان أرسطو يرى أن القياس ينتهى إلى نتائج جديدة تختلف عن المقدمات التى بدأنا منها ، وذلك ما يتضح من تعريفه القياس على النحو سالف الذكر . إلا أن ما يلزم عن المقدمات فى حقيقة الأمر لايكون شيئا آخر غير تلك المقدمات ، بل هو متضمن فيها ثم أبرزناه أو خصصناه فى النتيجة . ففى القياس التالى مثلا :

كل طلبه قسم الفلسفه يدرسون المنطق

محمـــد طالب بقسم الفلسفة

إذن محمـــد يدرس المنطق

نجد أن صدق المقدمة الكبرى معناه شمول الحكم فيها لجميع طلبة قسم الفلسفة واتصافهم بهذه الصفة . فاذا ما عقبنا على ذلك بالقول أن محمدا هـــو أحد هؤلاء الطلبة ، فاننا لانقول شيئا جديدا ، لأننا نعرف بالفعل أنه أحد أفراد هذه الفئة . أما إذا لم نكن نعرف أنه واحد من أعضاء هذه الفئة ، لم يكن الحكم فى القضية الكبرى شاملا لجميع أفراد الموضوع ، وبذا يكون التعميم فى المقدمة الكبرى تعميما خاطئا لأننا لم ندخل فى حسابنا هذا الطالب حين تكلمنا عن جميع أفراد هذه الفئة . وهكذا يتضح أن القياس الأرسطى لايخرج عند كثير من المناطقة المعاصرين عن واحدة من حالتين : إما أن يكون تحصيلا للحاصل لا يفيد معرفة جديدة ، وإما أن يكون تناقضا .

٧ — من حيث أنه وسيلة مثلى أو نموذجية للبرهان: يرى أرسطو أن القياس — وخاصة من الشكل الأول — هو الوسيلة المثلى للبرهان ، فى حين أنه ليس برهانا بالمعنى الصحيح ، إذ يمكننا مثلا :—

(ا) أن نبرهن على صدق نتيجة من مقدمتين كاذبتين ، مثل :

كل من يعرف الايطالية	يعرف المنطق	×
كل طلبة قسم الفلسفة	يعرفون الايطالية	×
∴ كل طلبة قسم الفلسفة	يعرفون المنطق	ص

(ب) أو أن نبرهن على صدق نتيجة ، من مقدمتين إحداهما كاذبة ، مثل :

كل حيوان	يتغذى على الأعشاب	×
الحصان	حيوان	ص
∴ الحصان	يتغذى على الأعشاب	ص

(ح) أو أن نبرهن على كذب نتيجة ، من مقدمتين إحداهما صادقة والأخرى كاذبة ، مثل :

كل حيوان	مشقوق الظلف	×
الإنسان	حيوان	ص
∴ الإنسان	مشقوق الظلف	×

ويرجع السبب في أننا نستطيع إستنتاج مثل هذه النتائج المختلفة ، إلى أن القياس عند أرسطو صورى فى طابعه العام ، ولذا فليس أساس صدق نتيجة القياس عنده هو مدى مطابقتها أو عدم مطابقتها للواقع الخارجى ، بل مدى لزومها عن المقدمتين بالضرورة وفقاً لقواعد معينة . ولو كان الأمر مقصوراً على هـذا الحد ، لكان الأعتراض الأساسى على القياس هو كونه تحصيلا للحاصل ، إلا أن أرسطو يعتبره فى الوقت نفسه بمثابة الوسيلة المثلى للبرهنة على صدق قضايا تتكلم عن أشياء فى الواقع الخارجى ، ومن ثم أعتبره الوسيلة المثلى لتحصيل العلم ، وذلك حين ذهب إلى أن القياس — وخاصة من الشكل الأول — يكشف عن الأسباب — أى الحدود الوسطى — بحيث إذا عرفت الأسباب عرفت معها النتائج . وكأننا نقيس فى هـذه

الحالة نتيجة القياس بمعيارين ، معيار لزومها عن المقدمات، ومعيار مطابقتها للواقع. والمعياران مختلفان ، والخلط بينهما يؤدى إلى أن تـكون النتيجة الواحـدة أحيانا فى القياس ، صحيحة من حيث لزومها الصورى عن المقدمات ، وكاذبة من حيث مطابقتها للواقع .

ثانيا : نقد الصورية فى القياس :

يترتب على ما سبق ، القول بأن منطق أرسطو لم يكن منطقا صوريا خالصا ، أو بعبارة أخرى أنه كان (مزيجا من الصورية والمـادية) (١) . الجانب الصورى منه — ويتمثل فى كتابه « التحليلات الأولى » — يتبدى فى تسلسل التصورات فى الذهن وفقا لقوانين معينة ، بصرف النظر عما تشير إليه فى الواقع التجريبى . والجانب المادى منه — ويتمثل فى كتابه « التحليلات الثانية » — يتبدى فى الأهتمام بالاستدلال من حيث انطباقه على موضوعات العلم . وكانت هذه الثنائية فى المنطق القديم موضع النقد لدى دعاة المـادية ودعاة الصورية معاً . فرأى أصحاب الاتجاه الأول ، أنه لم تـكن هناك أداة للعلم قديما إلا المنطق القياسى بمعناه التقليدى الأمر الذى أدى إلى تأخير التفـكير العلمى بمعناه الحقيقى فى أوروبا حتى حـوالى القرن السادس عشر . فلما بدأ التفـكير العلمى الذى يعتمد على ملاحظة الواقع وعلى إجراء التجارب ، بدأ الاتجاه إلى التخلص من تلك الأداة التى لا تتفق فى صوريتها مع ضرورة التفـكير فى الواقع نفســه ، بما فيه من موضوعات وأشياء تقع فى الخبرة الحسية ، ومن ثم إستبدلوا بالمنطق القديم ، المنطق الأستقرائى ، أو المنطق المادى كما يسمى أحيانا . كما أن دعاة الصورية فى المنطق الحديث والمعاصر، رفضوا المنطق التقليدى لما فيه من شوائب مادية ، إذ لم يكن فى نظرهم على المستوى المجرد الصورى

(١) د. عبد الرحمن بدوى : المنطق الصورى والرياضى ، صفحة ٩ .

التكامل ، وأرادوه أداة صورية خالصة تستخدم الرموز بدلا من الألفاظ ، ومن ثم إستبدلوا به ما يسمى بالمنطق الرمزى . وهكذا أصبح المنطق التقليدى عند أغلب المناطقة المعاصرين غيرصالح كأداة مثلى للتفكير السليم أو للاستدلال الصحيح. وقد عبر عن هذا المعنى كثير من المناطقة ، منهم على سبيل المثال لا الحصر :

(ا) رودلف كارنب ، الذى ذهب إلى أن المنطق التقليدى (كان عاجزا عجزا تاما عن أن يستوفى الدور الجديد الذى ينبغى أن يلعبه فى الفكر ، من ثراء فى المضمون ، ودقة صورية ، وفائدة تنتج عن طريقة إستخدامه . لأنه ظل معتمداً على النظام المدرسى الأرسطى الذى لم يحرز — حتى فى أقصى حالات تطوره إلا تقدما طفيفا فى حد ذاته) .(١)

(ب) برتراند رسل ، الذى ذهب إلى القول بأن(من أراد فى عصرنا الحاضر أن يدرس المنطق ، فوقته ضائع سدى لو قرأ لأرسطو أو لأحد تلاميذه). (٢)

(حـ) ابن تيمية ، الذى قال فى كتابه « ألرد على المنطقيين » :(مازال نظار المسلمين يعيبون طريقة أهل المنطق ، ويبينون ما فيها من العى والكنه ، وقصور العقل وعجز النطق . ويبينون أنها إلى إفساد المنطق العقلى واللسانى أقرب منها إلى تقويم ذلك . ولا يرضون أن يسلكوها فى نظرهم ومناظرتهم ، لا مع من يوالونه، ولا مع من يعادونه) .(٣)

(ء) الفردتارسكى،الذى ذهب فى التمهيد لكتابه «مقدمة للمنطق» إلى القول: (إنى أعتقد أن المساحة المحدودة التى خصصناها للمنطق التقليدى فى هذا الكتاب ،

---

(١) Carnap, R. : The Old and the New Logic
وهو مقال منشور فى كتاب « الوضعية المنطقية » لآير Ayer . صفحة ١٣٧ .
(٢) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى . (الجزء الأول) . تصدير .
(٣) ابن تيمية : الرد على المنطقيين . صفحة ١٩٤ .

تتفق والدور الصغير البسيط الذى يلعبه فى العلم الحديث . وإنى أعتقد كذلك أن أغلب المناطقة المعاصرين يشاركوننى هذا الرأى).(١)

(هـ) دافيد هيلبرت ، الذى ذهب إلى أن الصياغة الأرسطية للمنطق ، أصبحت غير كافية حتى بالنسبة للمواقف المنطقية البسيطة : فهى أساسا لا تكفى لتوضيح الأسس المنطقية للرياضيات ، كما أنها تفشل بصفة خاصة ، حينما نرغب فى التعبير رمزيا عن العلاقة بين عدة موضوعات . (٢)

المنطق الرمزى الجديد :

روافده :

من العبارة السابقة التى تعبر عن وجهة نظر هيلبرت ، نتبين أن هناك رافدين أساسيين يغذيان تيار المنطق الرمزى الجديد : رافد منطقى ، ورافد رياضى .

أولا: الرافد المنطقى:

ويتمثل فى الجهود الموافقة التى بذلها المناطقة :—

١ — إما لمحاولة تفسير بعض النظريات الخاصة بالمنطق التقليدى تفسيرا صوريا رمزيا ، على النحو الذى فعله يان لوكاشيفتش فى كتابه « نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصورى الحديث »(٣) وبذلك يصبح المنطق الرمزى الجديد إستمرارا للمنطق القديم . وقد عبر مترجم الكتاب سالف الذكر عن هذا المعنى

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, Preface

(٢) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 55.

(٣) لهذا الكتاب ترجمة عربية بقلم الدكتور عبد الحميد صبره ، ونشرته منشأة المعارف بالاسكندرية عام ١٩٦١ .

بقوله (يخطيء من يظن أن نظرية القياس الأرسطية قـــد إنتهت بظهور المنطق الرياضي الحديث . والذين يعارضـون بين منطق أرسطو والمنطق الرياضي إنما يسيئون فهم العلاقة بينهما . فالمنطق الرياضي ليس جنسا آخر من المنطق يبـــاين المنطق الأرسطي ، وإنما هو منطق صوري في ثوب جديد . وقد كان أرسطو أول من وضع أسس المنطق الصوري حينما صاغ في القرن الرابع قبـل الميلاد نظريته في القياس).(١)

٢ — وإما لوضع منطق صوري جديد ، يتحاشى كل النقائص سالفة الذكر في المنطق القديم ، ويكون أداة مثمرد فعالة في عمليات الأستدلال الصحيحة . ويتمثل هذا الاتجاه عند أغلب المناطقة المعاصرين .

ثانياً : الرافد الرياضي :

ويتمثل في إتجاهين متكاملين :—

(ا) إتجاه يحاول أصحابه اصطناع منهج أشبه بالمنهج الرياضي في دقتـــه ، بحيث يمكن تطبيقه لا على الرياضيات فقط ، بل كذلك بالنسبة لكافة موضـوعات الفكر . ويتمثل هذا الاتجاه في محاولات أولية قام بها ديكارت وليبنتز وغيرهما .

(ب) واتجاه يرى دعاته ضرورة تطوير المنطق الجديد على نحو يجعل في مستطاع العلماء حل كثير من المشكلات الرياضية ، وإلى تحليل أسس الرياضيات ومفاهيمها الأولية ، خاصة :

١ — بعد ظهور الهندسات اللا اقليدية وذلك بنشر الأبحاث التي قام بها عالم الرياضة الروسي نيقولاى لوباشيفسكي Nicolai Lobachevsky فيما بين عامي ١٨٢٩ ، ١٨٤٠ ، التي تمثلت فيها أول محاولة لاقامة هندسة لا إقليدية ، ثم بنشر

(١) المرجع السابق ، مقدمة المترجم ، صفحة ٧ .

الدراسات التى قام بها العالم الرياضى الألمانى برنارد ريمان Bernhard Riemann الذى قدم فيها تحليلا أكثر عمقا لصورة أخرى من صور الهندسة اللا قليدية (١) .

٢ — وبعد ظهور جبر المنطق لعالم المنطق الأيرالندى جورج بول Boole G. فيما بين عامى ١٨٤٧ ، ١٨٥٤ .

حقا إنه لم يكن هناك إرتباط مباشر بين هذين الخطين من خطوط الفكر (الهندسات اللااقليدية ، وجبر المنطق) ، إلا أن كلا منهما أثر تأثيراً كبيراً فى الفكر الرياضى ، على نحو أدى — مع نهاية القرن التاسع عشر — إلى تبين العلاقة الوثيقة بينهما ، ومن ثم إلى ظهور نظرة جديدة لطبيعة المنطق ، وإلى الرابطة القوية بينه وبين الرياضيات (٢) .

ولقد عبر موريس شليك عن هذا المعنى بقوله : (إن الرياضيين قد طوروا المناهج المنطقية فى السنوات العشر الحالية [أى من حوالى ١٩٢٠ إلى ١٩٣٠] ، وذلك لحل المشكلات التى لم يتمكنوا من التغلب عليها باستخدام الطرق التقليدية للمنطق ، . (٣) ويفسر كارنب هذا المعنى بقوله : (لقد ظهرت فى نهاية القرن الماضى عدة تناقضات ومفارقات فى النسق الرياضى الجديد الخاص بنظرية المجموعات . وسرعان ما كشف البحث الدقيق عن أن هذه التناقضات لم تكن ذات طبيعة رياضية ، بل كانت ذات طبيعة منطقية عامة ، وهى ما نسميها « بالتناقضات المنطقية » . فلم يكن المنطق الجديد قد تطور بدرجة تجعله قادرا على التغلب على هذه التناقضات أو حلها ... وكانت هذه النقيصة بمثابة الدافع لاعادة بناء النسق المنطق

---

(١) Lee, H. : Symbolic Logic, P. 4.

(٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه

(٣) Schlick, M. The Turning Point in Philosophy. (in : Logical Positivism. edited by : Ayer, A.J.) P. 54.

من أساسه، (١) . أما عن الحاجة إلى تحليل أسس الرياضيات فقد عبر عنها هيلبرت بقوله : (إن هناك باعثا قويا أدى إلى تطور المنطق الجديد . وكان ذلك الباعث ناتجا عن حاجة الرياضيات إلى أساس دقيق تقوم عليه ، وإلى طريقة دقيقة منهجية للبحث فيها) (٢) . ويفسر كارنب هذا المعنى بقوله : (إن العامل الهام الذى أدى إلى تطور المنطق الجديد ، كان يكمن فى ظهور الحاجة إلى دراسة نقدية تعيد النظر فى أسس الرياضيات . فالرياضيات وخاصة منذ عصر نيوتن وليبنتز تقدمت تقدما كبيرا ، وحصلت قدرا كبيرا من المعرفة الجديدة . إلا أن أسس الرياضيات لم تتطور بالسرعة الكبيرة التى كان ينمو بها البناء الرياضى نفسه . ولذا فقد بدأت محاولة قوية لتوضيح المفاهيم الأساسية للرياضيات ، وكان هذا الجهد مثمرا فى حالات عديدة . فقد نجح الرياضيون فى إيجاد تعريفات دقيقة لبعض هذه المفاهيم ، مثل أفكارنا عن الحد ، وعن العدد ، تلك المفاهيم التى ظلت لفترة طويلة جدا ، تطبق فى الرياضيات بنجاح ، دون أن يكون قد تم تعريفها تعريفا دقيقا ..... ولقد بدأت محاولات توضيح هذه المفاهيم الأساسية فى الرياضة تتقدم خطوة خطوة . ولم يقنع المفكرون برد المفاهيم الرياضية إلى المفهوم الأساسى لفكرة العدد ، بل طالبوا كذلك بتوضيح فكرة العدد نفسها توضيحا منطقيا . ولقد تطلب هذا البحث فى الأسس المنطقية للحساب ، ضرورة وجود نسق منطقى يتصف بصفة الشمول ، وبالدقة الكاملة . وهكذا أصبحت هذه الأبحاث بمثابة القوة الدافعة لتطور هذا المنطق الحديث . ولقد قام كل من بيانو وفريجة وهوايتهد ورسل وهيلبرت ببحوثهم فى المنطق من أجل تحقيق هذا الغرض أصلا . كما أصبحت ضرورة إعادة بناء المنطق من جديد أكثر الحاحا ، حينما لوحظ أن تناقضات معينة من التى تنشأ فى الرياضيات ذاتها

(١) المرجع السابق . صفحة ١٣٩

(٢) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic. P. 1

طبيعة منطقية عامة . تلك التناقضات التي لم يمكن التغلب عليها إلا بواسطة إحداث تغيير أساسي في المنطق) (١) .

تعريف المنطق الرمزي :

يرجع أول استخدام للتعبير « المنطق الرمزي » Symbolic Logic إلى عالم المنطق الإنجليزي جون فن John Venn عام ١٨٨٠ (٢) ، وإن كان جورج بول يستخدم أحياناً تعبير « البرهان أو الاستدلال الرمزي » . والواقع إن المنطق الرمزي كثيراً ما يسمى بأكثر من إسم مثل : «المنطق الرياضي» Mathematical Logic ، فيستخدم كثير من المناطقة المعاصرين الإسمين على أنهما مترادفان ، مثل هيلبرت وأكرمان ، في كتابهما « مبادىء المنطق الرياضي » (٣) ، ومثل تشيرش Alonzo Church في كتابه «مقدمة للمنطق الرياضي»(٤)، ومثل بول G. Boole الذي كان يستخدم المصطلحات التالية : «التحليل الرياضي للمنطق» Mathematical Analysis of Logic أو « النظرية الرياضية للمنطق » . ومثل شرويدر E. Schröder الذي استخدم نفس المصطلح بالألمانية Mathematische Logik عام ١٨٧٧ ، وبوريتسكي Platon Poretsky عالم المنطق الروسي عام ١٨٨٤ ، وبيانو G. Peano عام ١٨٩١ . بل أن ليبنتز كذلك كان يستخدم تعبير « المنطق

---

(١) Carnap. R. . The Old and the New Logic. (in . Logical Positivism . ed. by . Ayer. A.J.) P. 135.

(٢) Church, A. . Introduction to Mathematical Logic. Vol. I. P. 51

(٣) Hilbert. D. & Ackermann. W. . Principles of Mathematical Logic, P. 1

(٤) Church . A. . Introduction to Mathematical Logic. P. 56

«الرياضى» Logica Mathematica (١) جنباً إلى جنب مع إسم «اللوجسطيقا»(٢).

هذا فضلا عن تسميات متعددة أخرى مثل : « حساب المنطق » عند بلوكيه G. Plaucquet عام ١٧٦٦ ، وهى نفس التسمية التى نجدها أيضاً عند جورج بول Calculus of Logic عام ١٨٧٤ . ومثل « اللوغاريتم للنطق » Algorithme Logique عن كاستيون G. F. Castillon عام ١٨٠٥ ، ومثل « حساب الاستدلال » Calculus of Inference عند دى مورجن عام ١٨٤٧ ، ومثل « المنطق الصورى » Theoretische Logik عند هيلبرت وأكرمان عام ١٩٢٨ ، وعند رسل فى كتابه « أصول الرياضيات »(٣) ، ومثل « جبر المنطق » Algebra of Logic عند بول ، وعند تشارلز بيرس عام ١٨٧٠ ، وغير ذلك(٤) .

وكما اختلفت الأسماء التى تطلق على هذا المنطق الجديد ، اختلفت التعريفات التى تعرفه ، وسنورد فيما يلى أهم هذه التعريفات : ـ

١ ـــ يرى بيانو أن (المنطق الرياضى ، هو الذى يدرس خصائص الإجراءات والعلاقات الخاصة بالمنطق) ، وإن موضوعه هو صياغة أبسط نسق من المفاهيم

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٥٧

(٢) وقد تم قبول هذه الكلمة logistics أو Logistica من حيث هى مرادفة فى معناها للمنطق الرمزى أو الرياضى فى المؤتمر الدولى للفلسفة الذى عقد فى جنيف عام ١٩٠٤ بناء على اقتراح إيتلسون Itelson وكوتيرا Couturat ولالاند A. Laland أنظر فى هذا بالتفصيل :

Carruccio, E. . Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought, P. 339.

(٣) برتراند رسل : أصول الرياضيات ، الترجمة العربية ، الجزء الأول ، صفحة ٤١

(٤) Church, A. . Introduction to Mathematical Logic.
(هامش صفحة ٥٧)

المنطقية صياغة تجعل منه شيئاً ضرورياً وكافياً لتمثيل الحقائق الرياضية وبراهينها تمثيلا رمزياً (١) .

٢ — ويعبر كل من هيلبرت وأكرمان عن المعنى نفسه ، بطريقة مختلفة إلى حد ما ، بقولهما (إن المنطق الرياضى — ويسمى كذلك المنطق الرمزى — امتداد للمناهج الصورية الخاصة بالرياضيات ، إلى مجال المنطق) . (٢)

٣ — وهناك تعريف آخر ، أوسع فى مضمونه من التعريفين السابقين ، يذهب إليه إيتورى كاروتشيو فى قوله بأن المنطق الرياضى هو (مجموعة المبادىء الخاصة بالبنية العقلية المتعلقة بالنظريات الرياضية) (٣) .

٤ — إلا أن تشيرش يرى فى المنطق الرياضى معنى أكثر إتساعاً من ذلك ، فيذهب إلى أنه (يفضل استخدام تعبير « المنطق الرياضى » ، على أن يفهم منه معنى المنطق إذا تم تناوله باستخدام المنهج الرياضى أو المنهج الرمزى بصفة خاصة)(٤) .

٥ — وبما أن موضوع المنطق الصورى هو الاستدلال بصفة عامة ، فإننا ننتهى مع رسل إلى القول بأن (المنطق الرمزى أو الصورى — وهما إصطلاحان سأستعملهما مترادفين — هو دراسة مختلف الأنواع العامة للاستنباط) (٥) . وبما أن رسل لا يميز بين الاستدلال والاستنباط (٦) ، فإنه ينتهى إلى أن (المنطق الرمزى مختص أساساً

---

(١) Carruccio, E. . Mathematics and Logic in History and Contemporary Thought. P. 339.

(٢) Hilbert. D. & Ackermann. W. . Principles of Mathematical Logic. P. 1.

(٣) Carruccio. E. . Mathematics and Logic in History and Contemporary Thought. P. 339

(٤) Church. A. . Introduction to Mathematical Logic. (هامش صفحة ٥٦)

(٥) رسل : أصول الرياضيات — الترجمة العربية — الجزء الأول — صفحة ٤١

(٦) المرجع السابق ، انظر هامش صفحه ٤٢

بالاستدلال بوجه عام) (١) ، ولذا فإن ما يبحث فيه هو (القواعد العامة التي يجرى الاستدلال عليها) (٢) ، على أن نضيف إلى هذا التعريف العام ، الشرط الذى اشترطه تشيرش، وهو استخدام المنهج الرياضى بصفة عامة ، والمنهج الرمزى بوجه خاص .

المنهج الرمزى الرياضى :

ويعنى فى الرياضيات وفى المنطق الحديث ، المنهج الذى يتبع فى صياغة الأنساق، والحسابات التحليلية ، صياغة صورية . وفيما يلى الخطوات التى ينبغى إتباعها لإقامة نسق منطقى رمزى :

١ — إعداد قائمة بالرموز الأولية المستخدمة فى النسق .

٢ — تحديد نوع التوالى — أو العلاقة — بين هذه الرموز الأولية — أو طريقة تتابعها وترابطها على نحو يؤدى إلى تكوين صيغ النسق بطريقة صحيحة .

٣ — تحديد الصيغ التى يمكن إعتبارها كبديهيات ، من بين تلك الصيغ التى تم تكوينها بطريقة صحيحة .

٤ — تحديد قواعد الأستدلال التى يمكن بواسطتها أن نستدل على صيغ تم تكوينها بطريقة صحيحة ، من مجموعة الصيغ التى إعتبرناها كمقدمات .

أهمية الرموز فى المنطق الجديد :

يعبر رودلف كارنب عن فائدة المنهج الرمزى فى المنطق الحديث فى مقال له بعنوان « المنطق القديم والمنطق الحديث » بقوله : (إن من يقرأ مقالا فى المنطق الحديث ، تسترعى إنتباهه سمة بارزة فيه ، هى إستخدام الصيغ الرمزية التى تبدو شبيهة بتلك الصيغ الرياضية . ولقد وضعت أصلا محاكاة للرياضيات ، ثم تطورت تبعا لذلك الصيغ التى تتناسب وتحقيق الأهداف الخاصة بالمنطق أكثر من غيرها .

---

(١) المرجع السابق ، صفحه ٤١

(٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

ومن الواضح جدا فى الرياضيات أن فائدة المنهج الرمزى — من الناحية التمثيلية — تفضل فائدة المنهج الذى يستخدم اللغة العادية . ولنأخذ مثلا لذلك العبارة التالية : « إذا ضرب أى عدد فى عدد آخر ، تكون نتيجة ذلك هى نفس نتيجة ضرب العد الثانى فى العدد الأول » ، فنجد أن المعنى يكون أكثر وضوحا ، لو قلنا : « بالنسبة لأى عددين س ، ص ، تكون : س × ص = ص × س » أو قلنا بشكل أكثر إختصارا ، مستخدمين فى ذلك علامة التعميم المنطقية : (س ، ص) . س × ص = ص × س) (١) . ويمكن تلخيص أهمية الرموز فى المنطق فيما يلى :—

١ — الدقة فى التعبير : حتى نتلافى ما فى اللغة من غموض ، وما يترتب على ذلك من مشكلات تتعلق بالاستدلال . وفى هذا الصدد تقول استبنج S. Stebbing فى كتابها « مقدمة حديثة للمنطق » : (إن إستخدام اللغة العادية أحيانا ما يؤدى إلى الوقوع فى الخطأ، أما إذا استخدمنا رموزا معينة، فاننا نتحاشى الخلط أو اللبس الذى قد ينشأ عن إستخدام الألفاظ . . . . ففعل الكينونة مثلا يمكن أن يعبر عن أكثر من معنى مختلف مثل : الوجود ، والحمل أو الأخبار Predication ، والهوية، والتساوى ، وهذا ما يتضح من العبارات التالية — على الترتيب — : « الله موجود » god is ، « سقراط يكون حكيما » Socrates is wise ، « إننى هو » it is me ، « إثنان وإثنان تساوى أربعة » two and two are four ، الأمر الذى قد يؤدى أحيانا إلى الغموض واللبس نتيجة للخلط بين هذه المعانى)(٢) .

---

(١) Carnap, R. : The Old and the New Logic, (in : " Logical Positivism " , ed. by : Ayer, A.J.), P. 136.

(٢) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, P. 116

٢ — الاقتصاد في الجهد والفكر فضلا عن البساطة ،وذلك ما يتجلى فى إمكان التعبير عن المعانى المركبـــة بشكل أبسط وأكثر إيجازا . فالتعبيرات القائمة على علاقات تبادليــة مثل س + ص = ص + س ، هي أوضح وأبسط وأدق فى المعنى مما لو عبرنا عنها باللغة . وفى هذا الصدد تقول استبنج فى كتابها سالف الذكر أن التعبير الرمزى يسهل عملية الفهم ويوضحه بشكل أكثر بساطة ،(وهذا مايتضح من التعبيرين التاليين :—

أولا : « س + ص = ص + س » .

ثانياً : إذا أضيف عدد تال لأى عدد معين، إلى هذا العدد ،كانت النتيجة هى نفس نتيجة إضافة العدد المعين إلى العدد التالى .

فالتعبيران متساويان فى المعنى ، وأن كان أولهما أكثر بساطة ووضوحا . . . وهذا ما يسمى بالبساطة المنطقية) (١) .

٣ — إمكان البحث عن العلاقات بين الإلفاظ أكثر من الالتصاق بالألفاظ نفسها ومعانيها ، أى إمكان التعبير بدقة عن صورة القضية لا مادتها .

٤ — إمكان التعبير الصورى عن عملية الاستدلال من الرموز بغض النظر عن معانيها

شروط إستخدام الرموز :

١ — أن تـكون الرموز موجزة بقـــدر الإمكان حتى تحقق معنى الاختصار أو الإيجاز ، وهو هدف أساسى من إستخدام الرموز .

٢ — أن تـكون مبسطة بقدر الإمكان حتى يمكن إدراكها بسهولة لأول وهلة.

٣ — أن تـكون مما يجعل عملية الاستدلال ، سهلة ميسورة بأقل جهد فى التفكير.

٤ — أن تـكون مجردة لاتعبر عن تصورات بعينها ، حتى يتسنى صياغتها فى قوالب وإطارات صورية خالصة .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١١٧

وهكذا يمكننا أن نتبين ثلاث خصائص على الأقل يجب توافرها في الجهاز الرمزى المنطقى ، هى :

١ — الاقتضاب أو الإيجاز Conciseness

٢ — والدقة Precision

٣ — والاتساق والنسقية Systematization[1]

المنطق القديم والمنطق الجديد :

يخلط بعض المناطقة بين المنطق التقليدى ، وبين المنطق الرمزى المعاصر ، فهما لا يكادان يفترقان فى نظرهم إلا بقدر ما يعتبر الأخير تطوراً جديداً ، للمنطق التقليدى على نحو جعله أكثر ثراء وغنى ، فكلاهما منطق صورى لا يهتم بالواقع الخارجى بقدر إهتمامه بالقوالب أو الإطارات المتعلقة بصورة الفكر . إلا أن التشابه بين المنطق القديم والمنطق الرمزى المعاصر ، وإن برر جمعهما فى إطار واحد هو الإطار الصورى ، إلا أنه لا يبرر إعتبارهما شيئاً واحداً ، بل إنهما مختلفان إختلافاً واضحاً يبرر فصلهما داخل ذلك الإطار الصورى العام ، ويمكن توضيح ذلك من المقارنة التالية :—

١ — المنطق الرمزى المعاصر منطق صورى صورية كاملة ، أو هو على الأقل أكثر تجريداً وصورية من المنطق القديم الذى كان يجمع بين الصورية والمادية ، وإن كان يغلب عليه الطابع الصورى . وتتبدى هذه الصورية الكاملة فى المنطق الرمزى المعاصر ، فى أنه لا يبحث فى العلاقات الواقعية بين الأشياء ، إنما يبحث فى العلاقات المنطقية التى يمكن أن تقوم بين القضايا ، ولذا فهو يحتوى على تعميات ذات

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٢١ .

مستوى لم نكن لنبلغه بإتباع المنطق التقليدى . كما أنه لا يهتم بالمطابقة بين القضايا وبين الواقع الخارجى . بل يميل أصحابه إلى أن تكون قضاياه والعلاقات بينها مما يختلف عن الواقع الخارجى[1] .

٢ — إن وسيلة التعبير فى المنطق الصورى التقليدى — وهى ألفاظ اللغة — أقل دقة وأدعى إلى الوقوع فى الخطأ ، منها فى المنطق الحديث الذى يستخدم بدلا من الألفاظ الرموز المختلفة .

٣ — إن منهج الاستدلال فى المنطق التقليدى أقل دقة منه فى المنطق الحديث ، لأنه كان مقصوراً على نوع واحد من الإستدلال هو الإستدلال القياسى .

٤ — إن المنطق التقليدى كاد أن يقتصر فى تناوله للعلاقات على علاقة التضمن وحدها ، الأمر الذى جعل قضاياه قضايا حملية تتكون كل منهـا من موضوع ومحمول مرتبطين بعلاقة التضمن أو الاشتمال . أما المنطق الحديث فقد كشف عن مجموعة كبيرة من العلاقات وحللها ووضع لها رموزاً محددة ، وحساباً تحليلياً دقيقاً .

٥ — المنطق التقليدى لم يكن يفرق بين القضية وبين دالة القضية ، أما المنطق الحديث فيفرق بينهما ، ويجعل أغلب اهتمامه منصرفا إلى دالات القضايا طالما أنه يستخدم رموزاً ومتغيرات .

٦ — المنطق الحديث أكثر خصوبة فى نتائج الإستدلال ، وذلك لاستخدامه كم المحمول وحسابه ، مما يوسع من قاعدة الإستدلال ، وكذا تحليل العلاقات ، مما يوسع من مجال الاستدلال ونطاقه .

---

(١) وقد أورد الفرد تارسكى أمثلة متعددة فى هذا الصدد ، ارجع الى :
Tarski, A. : Introduction to Logic, P.

تطور المنطق المعـــاصر :

أولا : عادة ما ترد بدايةهذا المنطق إلى كتابات ليبنتز Leibniz (+١٧١٦) وترجـع أهمية ليبنتز في هذا الصدد إلى :ـــ

(أ) أنه فـكر في إصطناع منهج عام يمـكن إتباعه أثناء البحث في كل العلوم ، وذلك بإتخاذ المنهج الرياضي نموذجاً يحتذى به في جميـع العلوم .

(ب) أنة فـكر في إستخدام لغة علمية يتخذها العلماء والمفـكرون وسيلة للتفاهم بينهم ، أسماها باللغة العالمية التي تستخدم الرموز بدلا من ألفاظ اللغة العادية ، أو باللغة الفلسفية Lingua philosophica ذات الخصائص العامة(١) .

(حـ) إنه رد كل المعارف أو الحقائق الضرورية إلى مبدأ واحد هو مبدأ الهوية، وصاغه صياغة رمزية عرفت فيما بعد بإسم قانون ليبنتز .

(ء) إنه توصل إلى صياغة مبـدأ مشترك بين جميع أنواع الاستدلالات ، هو مبدأ « إستبدال المتـكافئات » Substitution of Equivalents ، ذلك المبدأ الذى أوضحه جيفرنز فيما بعد بإسم « إستبدال المتشابهات »(٢) .

ثانياً : ظهرت في القرن الثامن عشر عدة محاولات في مجال المنطق الرمزى ، إلا أنها لم تـكن ذات أثر واضح في تطويره ، مثل تلك الجهـود التي بذلها لمبرت Heinrich Lambert (+١٧٧٧) وبلوكية Plaucquet وكاستيون Castillon والعـــالم الرياضي السويسرى ليونارد أويلر Leonard Euler الذى توصل إلى الـكشف عن الطريقة المعروفة بإسمـه في أغلب كتب المنطق التقليدى ، لتوضيح

---

(١) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, P. 327.

(٢) أو مبدأ « مناب الأشباه » . انظر « المنطق الصورى والرياضى » للدكتور عبد الرحمن بدوى ، صفحة ٢٥٧

البراهين القياسية وتصويرها بإستخدام الدوائر للتعبير عن الحدود أو الفئات(١) ، والتي كان لها تأثير كبير في إستخدام الأشكال عند فن بعد ذلك .

ثالثاً : قدم وليم هاملتون W. Hamilton (+ ١٨٥٦) في النصف الأول من القرن التاسع عشر نظريته — التي سبق ذكرها — في كم المحمول . كما قدم أوجستس دى مورجن A. De Morgan نظريته في منطقة الرياضيات ، وكذا نظريته في تحليل العلاقات ، فضلا عن قوانينه المعروفة في المنطق المعاصر ، الخاصة بالتعبير عن إجراء الجمع المنطقي بواسطة إجراء الضرب المنطقي ، وبالعكس .

ولقد بدأ المنطق الرمزى إستقلاله كفرع خاص من فروع العلم ، منذ حوالى منتصف القرن التاسع عشر ، وكان ذلك راجعاً إلى الدراسات التي قدمها جورج بول G. Boole (١٨١٥ — ١٨٦٤) مؤسس جبر المنطق . وكما أن بداية المنطق الرمزى ترد عادة إلى المحاولات التي بذلها ليبنتز في هذا الصدد ، فإننا نستطيع القول بأن جورج بول هو المؤسس الحقيقى للمنطق الرمزى ، ومن بين أهم الدراسات التي توضح أهمية بول في تاريخ المنطق المعاصر ، المقال الذى نشره عام ١٨٤٤ بعنوان « منهج عام في التحليل » A General Method of Analysis الذى أسهم به في تعميم التفكير البرهانى الجبرى(٢) ، وكذا كتابه « التحليل الرياضى للمنطق » Mathematical Analysis of Logic الذى نشره عام ١٨٧٤ ، وكتاب « أبحاث في قوانين الفكر » Investigations of the Laws of Thought عام ١٨٥٤ ، فضلا عن مجموعة الدارسات التي قام بها في مجال حساب الاحتمالات(٣).

---

(١) Lee, H. : Symbolic Logic, P.8

(٢) Kneale, W. 8 Kneale, M. : The Development of Logic, P. 404.

(٣) وقد نشرت مجموعة من هذه الدراسات ، مع كتاب «التحليل الرياضى للمنطق» في كتاب واحد هو :

Boole, G. : Studies in Logic and Probability. (London, 1952)

وتعتبر أهم الكشوف التى توصل إليها بول فى ميدان المنطق الرمزى ، هى إمكان وجود جبر خاص بالموضوعات التى ليست أعداداً(١) (مثل الفئات ، فالفئات يرمز لها برموز، كما أن العلاقات بين الفئات يمكن التعبير عنها بواسطة إجراءات شبيهة بالجمع والضرب)(٢) . ولقد ترتب على طريقة تناول بول للمنطق جبرياً أن أصبحت لدى المناطقة بعد ذلك أداة فعالة وناجحة فى تحليل منطق الرياضيات ، فضلا عن المنطق نفسه بصفة عامة .

ولقد تم تطوير جبر بول بواسطة غيره من المناطقة والرياضيين ، مثل چيفونز Jevons, w. الذى إقترح فى كتابه « المنطق الخالص » عام ١٨٦٤ إجراء تعديل بالنسبة للجمع المنطقى عند بول .

كما توصل جون فن John Venn عالم المنطق الإنجليزى إلى طريقة لتوضيح إجراءات الجبر ، وتصورها بواسطة عدة أشكال ورسومات diagrams ، وذلك فى كتابه « المنطق الرمزى »(٣) معدلا بذلك من طريقة إستخدام الدوائر عند أويلر ، مستخدما فى ذلك فكرتين أساسيين فى جبر بول ، هما فكرة الفئة الفارغة (أو الفئة الصفرية التى ليس لها ماصدقات) ، وفكرة الفئة الكلية أو الشاملة(٤) .

والواقع إن أهم الجهود التى بذلت لتطوير جبر بول ، وأهم الاضافات التى تمت إليه ،

---

(١) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, P. 405.

(٢) Lee, H. : Symbolic Logic, P. 7.

(٣) Venn, J. : Symbolic Logic (London, 1881)

(٤) Lee, H. : Symbolic Logic. P. 8

وسوف نستخدم فى كتابنا الحالى ، طريقة الشكل عند فن ، أثناء التعبير عن منطق الفئات ، والعلاقات القائمة بينها .

هى تلك التى نجدها عند عالم المنطق الأمريكى تشارلز بيرس[1] ، وعالم الرياضة الألمانى إرنست شرويدر E. Schröder ، وخاصة فيما يتصل بالعلاقات وتحليلها .

رابعا : مع نهاية القرن التاسع عشر ، ظهر اتجاه آخر نتيجة لحاجة الرياضيات إلى تدعيم الأساس الذى تقوم عليه مفاهيمها وطرق البرهان فيها . وترجع مصادر هذا الاتجاه إلى كتابات جوتلوب فريجة G. Frege (١٨٤٨ — ١٩٢٥) الذى نشر عام ١٨٧٩ كتاباً بعنوان « تدوين الأفكار » Begriffsschrift ، ثم نشر بعده بخمس سنوات ، أى عام ١٨٨٤ ، كتابا آخر هو « أسس علم الحساب » Die Grundlagen der Arithmetik[2] . ويعتبر أهم كتب فريجة المتعلقة بالمنطق الرياضى (أو الرمزى) وفلسفة الرياضة ، هو كتابه « المبادىء الأساسية لعلم الحساب » Grundgesetze der Arithmetik — الذى نشره فى قسمين ، الأول منهما عام ١٨٩٣ والثانى عام ١٩٠٣ — وقام فيه فريجة بتحليل المفاهيم والتصورات والعمليات الحسابية بشكل مفصل . إلا أن الجهاز الرمزى الذى استخدمه كان على درجة كبيرة من الصعوبة . ولقد ظلت أهمية كتابات فريجة مجهولة حتى كشف عنها وبسطها ووسعها عالم المنطق المعاصر برتراند رسل .

وترجع أهمية فريجة فى تاريخ المنطق الرمزى — بالإضافة إلى أهميته البالغة فى فلسفة الرياضيات ومنطقتها ، أى ردها إلى المنطق — إلى :

---

(١) أنظر مقال « المنطق الصحيح » عن تشارلز بيرس — لمؤلف هذا الكتاب — فى مجلة تراث الإنسانية ، المجلد السابع ، العدد ٢ .

(٢) وقد ترجم أوستن J. L. Austin هذا الكتاب الأخير لفريجة إلى اللغة الانجليزية عام ١٩٥٠ . كما ظهرت ترجمة إنجليزية للفصل الأول من كتابه « تدوين الأفكار » ، وكذا مقتطفات من كتابه « المبادىء الأساسية لعلم الحساب » وذلك فى كتاب : « ترجمات من أعمال جوتلوب فريجة الفلسفية » :

Geach & Black. M. : Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Fregė. (New york, 1952) .

١ — تحديد معنى قيمة الصدق فى القضية تبعاً لاختلاف نوع القضية ، تركيبية كانت أو تحليلية .

٢ — وإلى تفرقته بين القضية وبين دالة القضية ، تلك التفرقة التى توصل إليها فريجة نتيجة للمقارنة بين المحمول فى القضية ، وبين التعبير الخاص بالدالة الرياضية.

٣ — وإلى إدخاله وتقديمه بعض الرموز الجديدة فى الحساب التحليلى ، مثل الرمز " ⊢ " الذى يعبر عن الحكم أو الإثبات ، والذى يكتب قبل العلامة أو مجموعة العلامات الخاصة بالقضية[١] .

ولقد تطور هذا الاتجاه الذى بدأه فريجة على يد كل من بيانو G. Peano فى كتابه « الصيغ الرياضية Formulaires de Mathematiques» الذى حلل فيه الرياضيات بغرض ردها إلى المنطق ، والفرد نورث هوايتهد A. N. Whitehead فى كتابه « رسالة فى الجبر العام » ، سنة ١٨٩٨ الذى أوضح فيه الفرق بين أنماط المنطق (بما فى ذلك جبر بول كأحد هذه الأنماط) ، وكذا برتراند رسل فى أكثر من كتاب له مثل « أصول الرياضيات » ، و « المبادىء الرياضية » (الذى اشترك فيه مع هوايتهد) ، و « مقدمة الفلسفة الرياضية » ، ومثل هيلبرت فى كتابه « أسس المنطق الرياضى » ، وفتجنشتين L. Wittgenstein فى كتابه « رسالة منطقية فلسفية » .

خامساً : هكذا بدأ منذ نهاية القرن التاسع عشر ، وبداية القرن العشرين ، الاتجاه إلى توسيع مفهوم المنطق ، وكذا ازدياد الاتجاه إلى صياغة الرياضيات صياغة صورية مما ترتب عليه إظهار أن مجالى المنطق والرياضيات كانا يزدادان قربا واقترابا . فالاستدلال الرياضى ليس استدلالا لفظياً ، بل هو استدلال رمزى

(١) Kneale, W. & kneale. M. : The Development of Logic. P. 478

كما أنه لا يأخذ صورة التعبير ذى الموضوع والمحمول ، إنما كان فى حقيقته استدلالا منطقياً . كما أن توسيع مفهوم المنطق، أظهر هو الآخر عدم ضرورة اتخاذ المنطق صورة المنطق الحملى ، بل إمكان تعديله وإقامته على طريقة رياضية . الأمر الذى ترتب عليه قيام كل من رسل وهوايتهد عام ١٩٠٠ بمحاولة استنتاج الرياضيات من مبادىء المنطق الخالص . ولكى يتمكنا من إتمام ذلك ، كان عليهما أن يقيما منطقهما أولا ، إذ لم يكن قد تم حتى ذلك الوقت تقرير مبادىء وأسس المنطق الذى تم تطويرة على أنه نسق استدلالى قائم على مجموعة من البديهيات . وهذا ما ظهر فى العمل المشترك الذى قاما به معاً ، وهو كتاب « المبادىء الرياضية » ، مستفيدان فى ذلك من جهود كل من شرويدر وفريجة،فضلا عن جهود بيانو فى تحليل الرياضيات.

سادساً : والواقع إن تطور المنطق المعاصر لا يرجع فقط إلى جهود وأبحاث المناطقة الذين سبقت الإشارة إليهم . إذ لا يمكن إغفال جهود كثير من المناطقة المعاصرين مثل كوتيرا Couturat (١٨٦٨ — ١٩١٤) الفرنسى ، وردولف كارنب R. Carnap ، وايتورى كاروتشيو E. Carruccio الإيطالى ، والونزو تشيرش A. Church الأمريكى ، وكذا كل من سوزان لانجر S. Langer وسوزان استبنج S. Stebbing ، فضلا عن مناطقة مدرسة وارسو البولندية مثل يان لوكاشيفتش J. Lukasiewicz (١٨٧٨ — ١٩٥٦) والفرد تارسكى A. Tarski ، وكوتار بنسكى T. Kotarbinski وغيرهم ، الأمر الذى أدى إلى تطور المنطق الرمزى المعاصر على الصورة البالغة الدقة التى يتبدى عليها الآن بعد منتصف القرن العشرين .

الفصل الثانى

الحساب التحليلى للفئات

The Calculus of Classes

الحساب التحليلى للفئات أحد موضوعات الحساب المنطقى Logical Calculus، الذى يتكون منه ومن الحساب التحليلى للعلاقات ، وللقضايا ولدالات القضايا . وهو وأن كان أسبق من غيره من أنواع الحساب التحليلى فى المنطق المعاصر — تاريخيا — فى التطور إلا أن أغلب الكتب التى تعرض للمنطق الرمزى ، تجعل من الحساب التحليلى للقضايا بداية لعرضها النسقى لموضوعات المنطق . على أساس أن ما تقوله عن فئة ما ، أو عن علاقة بين فئتين أو أكثر ، إن هو إلا إثبات لقضية ما(١) . ونحن لن نلتزم فى عرض تمهيدى للمنطق المعاصر — كهذه الدراسة التى بين أيدينا — بالطريقة المتبعة فى أغلب الكتب الأجنبية ، بل سنبدأ من الحساب التحليلى للفئات ، أى من مكونات القضية لا من القضية ، منتهجين فى هذا منهجا تركيبيا يبدأ من الفئات ، والعلاقات بينها ، ثم القضايا وعلاقاتها ، منتهين من هذا إلى دالات القضايا وحسابها وكذا إلى العلاقات ، مع محاولة تطبيق قواعد الأستدلال بالنسبة لأغلب الموضوعات التى نعرض لها .

ومما هو جدير بالذكر أن موضوعات الحساب التحليلى الثلاثة الأساسية (للفئات والعلاقات والقضايا) مترابطة على نحو يصعب علينا فيه أن نعرض لواحد منها فقط دون أن نتناول الموضوعين الآخرين أو نعرض لهما . إلا أننا — بغرض تسهيل الدراسة — سنتناول كل موضوع منها على حدة ، بادئين بالحساب التحليلى للفئات ، وذلك كما يلى :

---

(١) Cohen, M. & Nagel. E. : An Introduction to Logic. P. 121.

يقوم حساب الفئات أساسا على إفتراض إنتماء الأشياء إلى فئات أو دخولها فى مجموعات ، بناء على إتصافها بصفة أو صفات معينة . ومن ثم يمكننا أن نتصور العالم، على أنه مكون من جميع الفئات التى يمكننا تخيلها . أو بمعنى آخر فان مجموع هذه الفئات تكون هى كل ما يتألف منه العالم . ولنرمز للفئات بالحروف الهجائية الآتية : ا ، ب ، حـ . . . . فإذا كنا نتكلم عن الفئة ا من بين الفئات التى يتألف منها العالم ، فان ما يتبقى فى العالم بعد أن نستبعد منه هذه الفئة — يكون هو كل مالا ينتمى إلى الفئة ا ، أو لا يكون عضوا من بين أعضائها ، أى ماليس ا ، أو : لا — ا (١) وسنرمز له بالرمز اَ . وهكذا يتكون العالم كله من أعضاء هى إما منتمية إلى الفئة ا أو إلى الفئة اَ . ولنوضح ذلك بالمثال التالى :—

لو كانت ا ترمز لفئة الأشياء الملونة باللون الأحمر ، كانت الفئة اَ شاملة لكل الأشياء غير الملونة باللون الأحمر مثل الأشياء الخضراء والصفراء وغير ذلك . وعلى ذلك فالعالم يتكون فى هذه الحالة من فئتين كبيرتين هما ا ، اَ . إلا أن العالم فى حقيقته لا يتكون من هاتين الفئتين بعينهما ، بقدر مايتكون من أى فئتين بحيث تكون إحداهما نفيا أو سلبا للاخرى . فلو كنا نتكلم عن الفئة ب ، ولتكن هى فئة الأشياء الخضراء ، كانت الفئة بَ هى الفئة المكونة من الأشياء غير الخضراء اللون . ومن ثم فان العالم يتكون فى هذه الحالة من الفئتين ب ، بَ . وبالمثل يمكننا أن ننتهى إلى أن العالم يتكون كذلك من : حـ ، حـَ أو ى ، ىَ . . . أو من أية فئة ونقيضها .

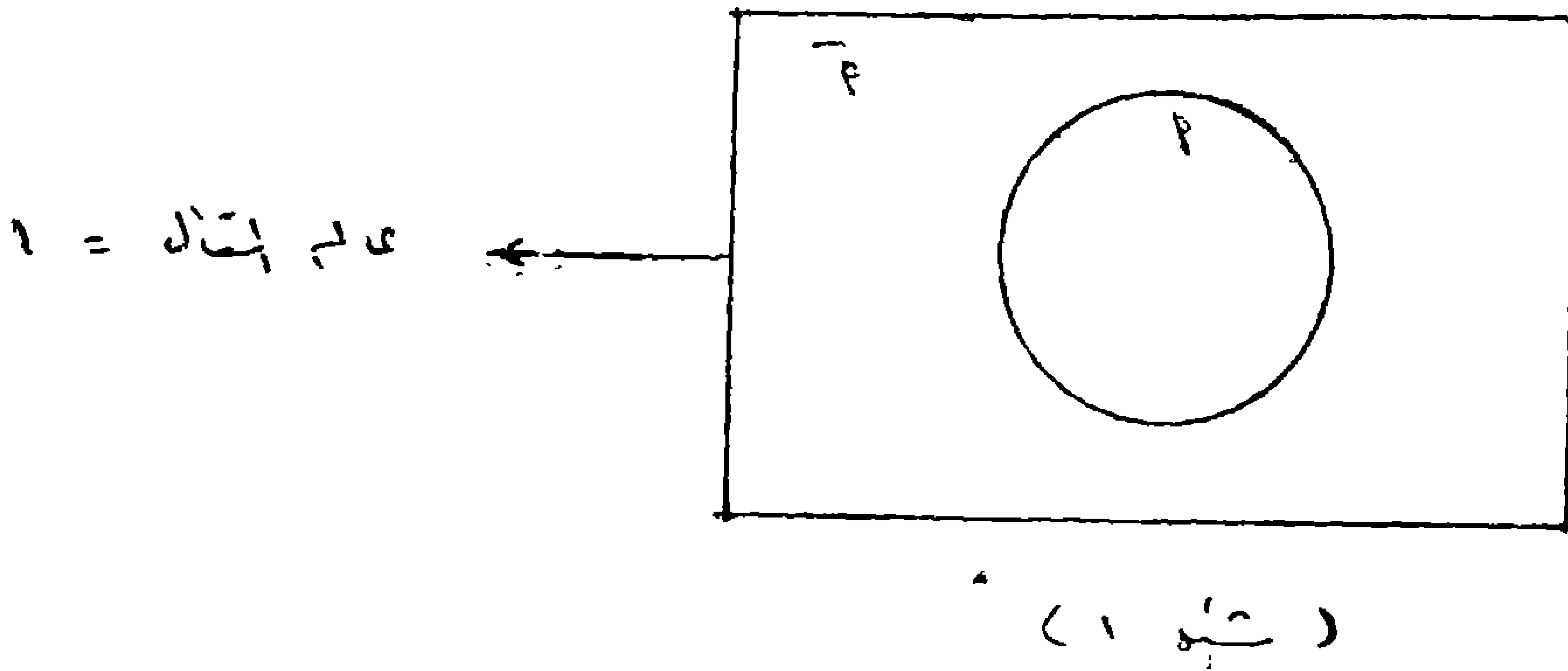
يلاحظ فى المثال السابق أن محور تصنيف الفئات فى العالم هو اللون ، وبمعنى

---

(١) Boole. G. : The Mathematical Analysis of Logic. (ed in . Studies in Logic and Probability). P. 64.

آخر فإن العالم الذى نتكلم عنه هو عالم الأشياء الملونة ، أو هو عالم المقال الخاص بالألوان . وسواء كنا نتكلم عن العالم بصفة Universe of Discourse عامة — كما هو الحال عند جورج بول — أو عن عالم مقال معين ، كما هو الحال عند دى مورجن[1] A. De Morgan فإننا نرمز له بالرمز ١ ؛ أى الواحد الصحيح . ومن ثم فإن : ١ = ا + اَ أو ب + بَ أو حـ + حـَ .... الخ .

وعادة ما تسمى الفئة المنفية التى يكون حاصل جمعها ، هى والفئة الأصلية ، مساوياً للواحد الصحيح ، مثل اَ بالفئة المنقوضة أو الفئة المكملة Complementary Class للفئة الأصلية[2] . ويمكن توضيح العلاقة بين فئة ما وبين الفئة المكملة لها بالرسم التالى :



(شكل ١)

الذى يوضح :—

١ — أن الفئة اَ هى الفئة المكملة للفئة ا ، من حيث أنها تحتوى على أى شىء فى عالم المقال لا يكون هو ا .

---

(١) Kneale. W. & Kneale. M. : The Development of Logic. P. 408.

(٢) Schipper. E. W. & Schuh. E. : A First Course in Modern Logic. P. 257 .

كما يوضح أن الفئة ا ، تعتبر أيضاً فئة مكملة للفئة اَ (على أساس أن ا هى الفئة التى تنفى اَ لأنها تساوى « لا لا ا » ونفى النفى إثبات) من حيث أنها تشتمل على كل ما لا يندرج تحت الفئة اَ ، ويسمى الرسم الذى يكون مماثلا للرسم السابق ، أو الذى يقوم على أساسه باسم « شكل فن » Venn's Diagram[1] .

الفئة المكملة للفئة الشاملة :

بما أننا نفترض لكل فئة ، وجود فئة مكملة لها بالنسبة لعالم مقال معين ، فان الفئة الشاملة Universe Class (أى عالم المقال) — بحكم ما هى فئة — ليست مستثناة من هذه القاعدة . وعادة ما تسمى الفئة المكملة للفئة الشاملة ، بالفئة الصفرية أو الفئة الفارغة The Null Class ، ويرمز لها بالرمز « صفر » . والواقع أن تصور الفئة الفارغة ، تصور يصعب تفسيره بدقة ، لكن من الممكن وصف هذه الفئة أو التعبير عنها بأنها « فئة جميع الفئات التى لا أعضاء لها »[2] . وهكذا يمكننا تعريف الفئة الفارغة بالصيغة التالية : صفر = اَ

التى تعنى أن الفئة الفارغة تتطابق ذاتياً مع الفئة المكملة للفئة الشاملة ، أو تكون فى حالة هوية معها . وبما ان الفئة الشاملة تحتوى على جميع الفئات ذات الأعضاء ، فان الفئة الفارغة إذن تكون فى حالة هوية مع « لا شىء » أو « الصفر » .

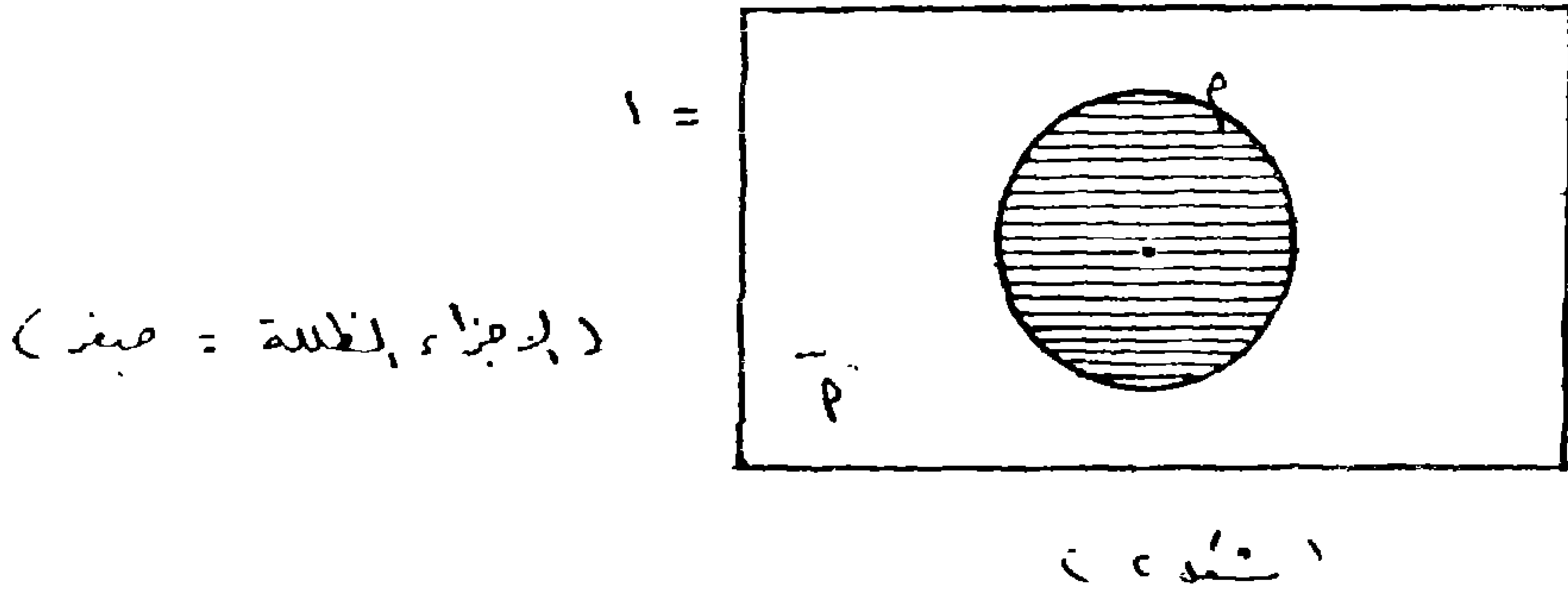
هذا ويمكننا التعبير عن كون فئة ما ، مثل ا ، بأنها فئة فارغة أو مساوية للصفر بالقول : ا = صفر

---

(١) نسبة إلى جون فن John Venn عالم المنطق الانجليزى الذى ألف فى المنطق الحديث كتاباً قيما بعنوان « المنطق الرمزى » Symbolic Logic [لندن عام ١٨٨١] .

(٢) Schipper. E. & Schuh. E. A First course in Modern Logic. p.27 3.

وهذا ما نعبر عنه بالرسم كما يلى :



والواقع أن الحساب التحليلى للفئات إنما يقوم أصلا على معرفة العلاقة بين الفئات حين تتخذ حيالها عدة إجراءات Operations — هى أشبه ما تكون بالعمليات التى يجريها الرياضيون فى الحساب والجبر مثل : الضرب أو الجمع أو الطرح — بغرض التوصل إلى معرفة القوانين التى تحكم استنتاج النتائج التى تلزم عن اتخاذ تلك الإجراءات .

ويمكن تصنيف أهم الإجراءات التى تتبع إزاء الفئات إلى نوعين :

١ — إجراءات تتخذ إزاء الفئات فتنتج عنها فئات .

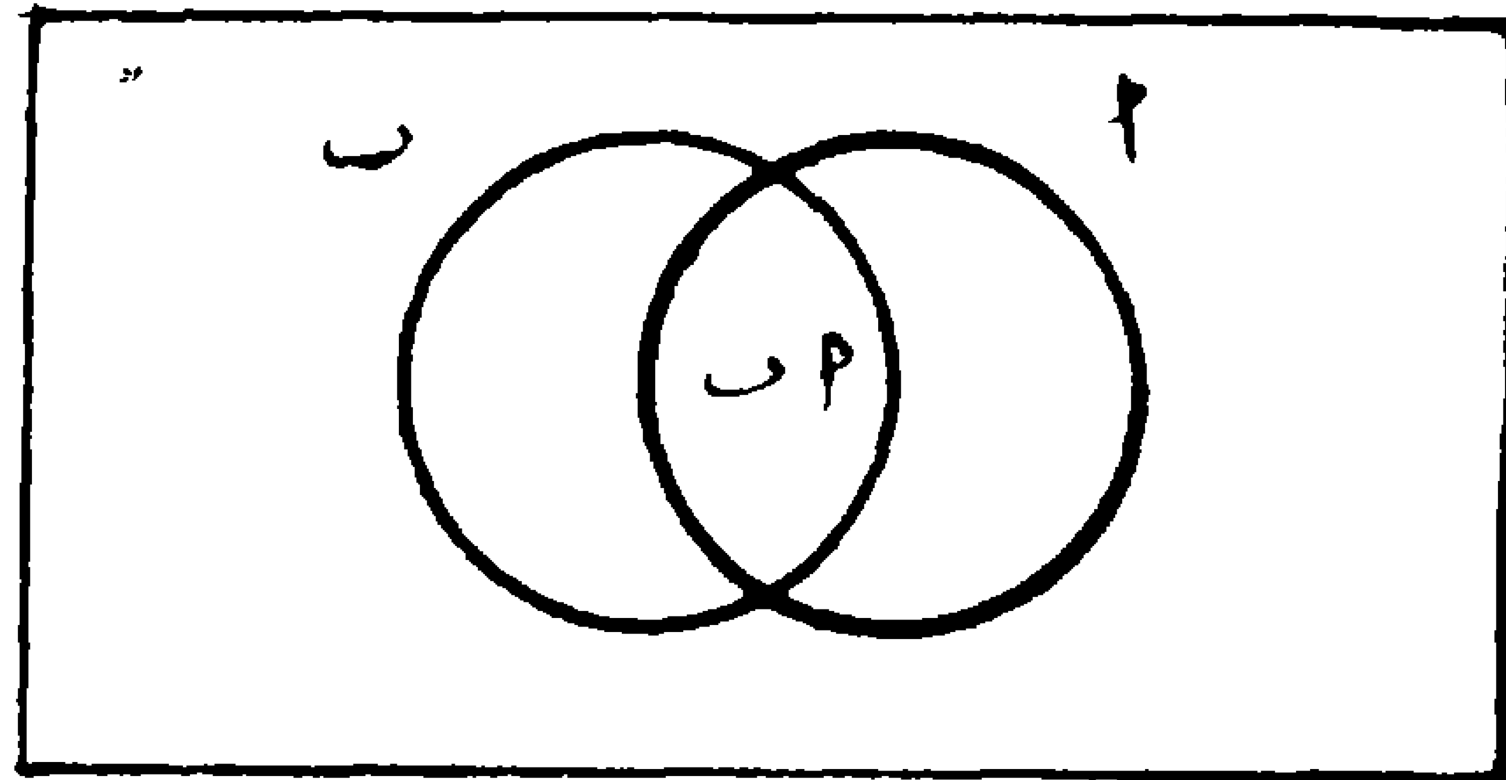
٢ — إجراءات تتخـــذ إزاء الفئات ، بالإضافة إلى العلاقات ، فتنتج عنها قضايا لا فئات .

(ا) ومن أهم الإجراءات التى تمثل النوع الأول ما يأتى .

أولا : الضرب المنطقى

يتضح من الرسمين السابقين أن عالم المقال يتكون من فئتين هما ا ، والفئة المكملة لها وهى ا̄ .

وبما أننا نستطيع أن نذكر دائماً الفئة المكملة لأية فئة ، بواسطة نفي الفئة الأصلية ، فإن عالم المقال المكون من فئتين سوف يحتوى أو يشتمل على أربع فئات فرعية ممكنة . وبعبارة أخرى ، لو أننا وضعنا من شكل فن فجعلناه محتوياً على فئتين أصليتين هما ا ، ب لأمكن رسمه على النحو الآتى :



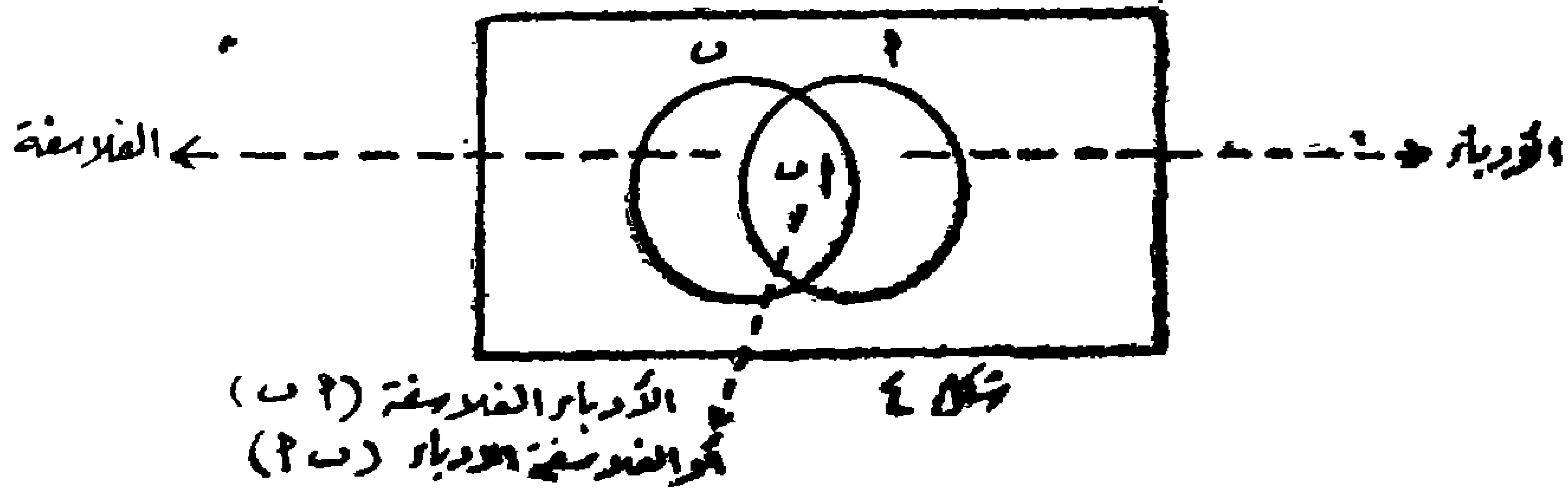
شكل ٣

وتسمى الفئة الشاملة للماصدقات المشتركة بين الفئتين ا ، ب ، أى الفئة (ا ب) التى تنتج عن تقاطع الفئتين ا ، ب أو عطفهما أو حاصل ضربهما ، تسمى بالفئة العطفية Conjunctive Class . ومن الواضح فى الشكل السابق أن عدد ما صدقات الفئة ا ب المعبرة عن حاصل ضرب Logical product الفئتين ا ، ب أقل من عدد ما صدقات أو أعضاء كل واحدة فى الفئتين على حدة ، فضلا عن ما صدقاتهما معاً . ومن ثم فإن الفئة (ا ب) تكون متضمنة فى الفئتين ا ، ب معاً طالما أنها جزء من ا ، وجزء من ب فى وقت واحد . ولنأخذ المثال التالى لتوضيح هذا المعنى : فلو كان عالم المقال الذى نتكلم عنه يتكون من فئتين هما فئة الأدباء (ا) وفئة الفلاسفة (ب) كانت إذن فئة الأدباء الفلاسفة (ا ب) أو فئة الفلاسفة الأدباء (ب ا) :

١ — جزءا من فئة الأدباء على حدة (أ) ، لأن الأدباء الفلاسفة هم بعض الأدباء .

٢ — وجزءا من فئة الفلاسفة على حدة (ب) ، لأن الفلاسفة الأدباء هم بعض الفلاسفة .

٣ — أو كانت هى جزءا من الفئتين معاً . وهذا ما يتضح من الرسم التالى :



— ولذا فإننا عادة ما نعرف حاصل الضرب المنطقى لفئتين بأنه : هو الفئة التى تكون :

١ — متضمَّنة فى الفئتين أو مندرجة ومحتواة فيهما معاً .

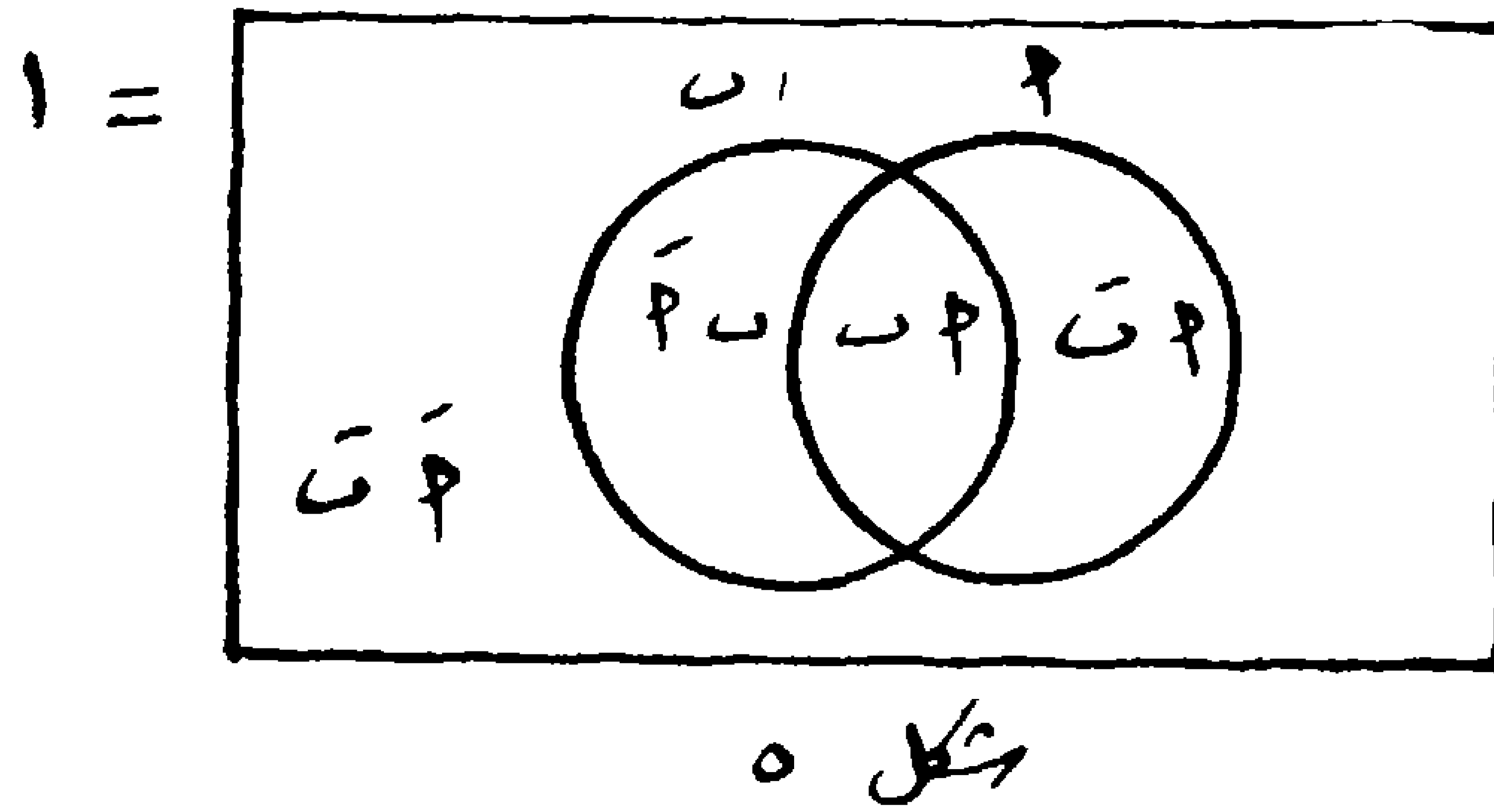
٢ — وتكون متضمِّنة أو مشتملة لكل فئة ، مندرجة أو محتواة فى كل منهما. بمعنى أنه لو كانت فئة الأدباء الفلاسفة تحتوى على فئة هى س من الذين يعبرون عن الفلسفة الوجودية ، وفئة أخرى هى ص من الذين يعبرون عن الفلسفة غير الوجودية . ولو كانت فئة الفلاسفة الأدباء تحتوى على فئة هى ع ممن يؤمنون بالأدب الملتزم وعلى فئة أخرى هى م ممن لا يؤمنون بالالتزام فى الأدب . كانت الفئة أ ب مشتملة على كل من الفئات : س ، ص ، ع ، م من حيث هى فئات صغرى أو فرعيـــة مندرجة تحت أ ، ب معاً . لذا عادة ما يعرف حاصل الضرب المنطقى لفئتين بأنه أكبر فئة يمكن أن تشمل الفئتين أو تكون مشتركة بينهما [1] .

---

(١) دكتور عبد الرحمن بدوى : المنطق الصورى والرياضى ، الطبعة الثانيـــة ، صفحة ٢٩٠ .

وعادة ما يرمز لهذه الفئة الدالة على حاصل ضرب فئتين ، على النحو المتقـدم ، بوحدة بسيطة من المتغيرات مثل (ا ب) ، كما تستخدم أحيانا علامة الضرب (×) المستخدمة فى الرياضة للتعبير عن هذا الإجراء بين الفئات فى المنطق، فنكتب أيضا : (ا × ب) . (١)

هذا ويلاحظ : أولا : أننا نستطيع تسمية بقية فئات عالم المقال الثلاث المتبقية على النحو الذى فعلناه بالنسبة للفئة ا ب ، وذلك كما يلى :



شكل ٥

١ — أن الفئة التى ينتمى أعضاؤها إلى الفئة ا ، لـكنهم لا ينتمون إلى الفئة ب ، تـكون هى حاصل ضرب الفئتين ا ، بَ . ومن ثم يرمز لها بالرمز (ا بَ) أى الفئة التى تشتمل على أعضاء يتصف كل منهم بأنه ا ، وبأنه ليس ب فى وقت واحد . (الأدباء الذين لا ينتمون إلى فئة الفلاسفة) .

٢ — إن الفئة التى ينتمى أعضاؤها إلى الفئة ب لـكنهم لا ينتمون إلى الفئة ا ، تـكون هى حاصل ضرب الفئتين ب ، اَ . ومن ثم يرمز لهـا بالرمز (ب اَ) ، أى الفئة التى تشتمل على أعضاء يتصف كل منهم بأنه ب ، وبأنه ليس ا فى وقت واحد . (الفلاسفة الذين لا ينتمون لفئة الأدباء) .

---

(١) وكان بيانو G. Peano عالم الرياضة الإيطالى مثلا يستخدم العلامة $\cap$ للتعبـير عن ضرب الفئات .

٣ — إن الفئة التى لاينتمى أعضاؤها إلى أى من الفئتين ا أو ب ، بل ينتمون إلى الفئة التى تتكون من كل ما هو ليس ا وليس ب فى وقت واحد . تكون هى حاصل ضرب الفئتين اَ ، بَ . ومن ثم يرمز لها بالرمز اَ بَ . [1]

ثانيا : إن الفئة المكملة للفئة ا (أى الفئة اَ) فى شكل ه، تحتوى فى وقت واحد على :

١ — ذلك الجزء من عالم المقال الذى يكون خارجا عن الفئة ا ، لكنه ينتمى للفئة ب ، أى (اَ ب) .

٢ — وذلك الجزء من عالم المقال الذى يكون خارجا عن الفئة ا ، وعن الفئة ب فى الوقت نفسه ، أى (اَ بَ).

وعلى ذلك فإن : اَ = اَ ب + اَ بَ .

ثالثا : إن الفئة المكملة للفئة ب (أى : بَ) ، تحتوى — فى الشكل السابق نفسه — على :

١ — ذلك الجزء من عالم المقال الذى ينتمى إلى الفئة ا ولا يكون منتميا إلى الفئة ب ، أى (ا بَ) .

٢ — وذلك الجزء من عالم المقال الذى لا ينتمى إلى الفئة ا ولا إلى الفئة ب فى وقت واحد ، أى (اَ بَ) .

وعلى ذلك فإن : بَ = ا بَ + اَ بَ .

رابعا : ضرورة التفرقة وعدم الخلط بين الفئتين التاليتين :

$\overline{(ا ب)}$ ، اَ بَ

فالرمز الأول $\overline{(ا ب)}$ [2] يدل على الفئة المكملة لحاصل ضرب الفئتين ا ، ب ، أى الفئة ا ب . أما الرمز اَ بَ فيعنى حاصل ضرب فئتين مكملتين للفئتين ا ، ب (وهما اَ ، بَ) . ولكى تزداد هذه التفرقة وضوحا نقول :

---

(١) وتكتب أحياناً فى بعض كتب المنطق كما يلى : اَ × بَ ، أو تكتب أحياناً $\overline{ا}\,\overline{ب}$.
(٢) وتكتب أحياناً على النحو الآتى : (ا ب)َ .

١ — إن الفئة المكملة للفئة اب ، أى $\overline{(\text{ا ب})}$ ، إنما تشمل كل ما هو موجود فى عالم المقال ولا يكون منتمياً إلى الفئة ا ب . وهكذا فهى تشمل على : ا بَ ، اَ ب ، اَ بَ وهذا ما يتضح من الشكل رقم ٥ .

∴ $\overline{(\text{ا ب})}$ = ا بَ + اَ ب + اَ بَ .

٢ — فى حين أن الفئة اَ بَ إنما تشير إلى ما هو مشترك بين المنفيين اَ ، بَ فى وقت واحد ، من حيث هى حاصل ضربهما المنطقى .

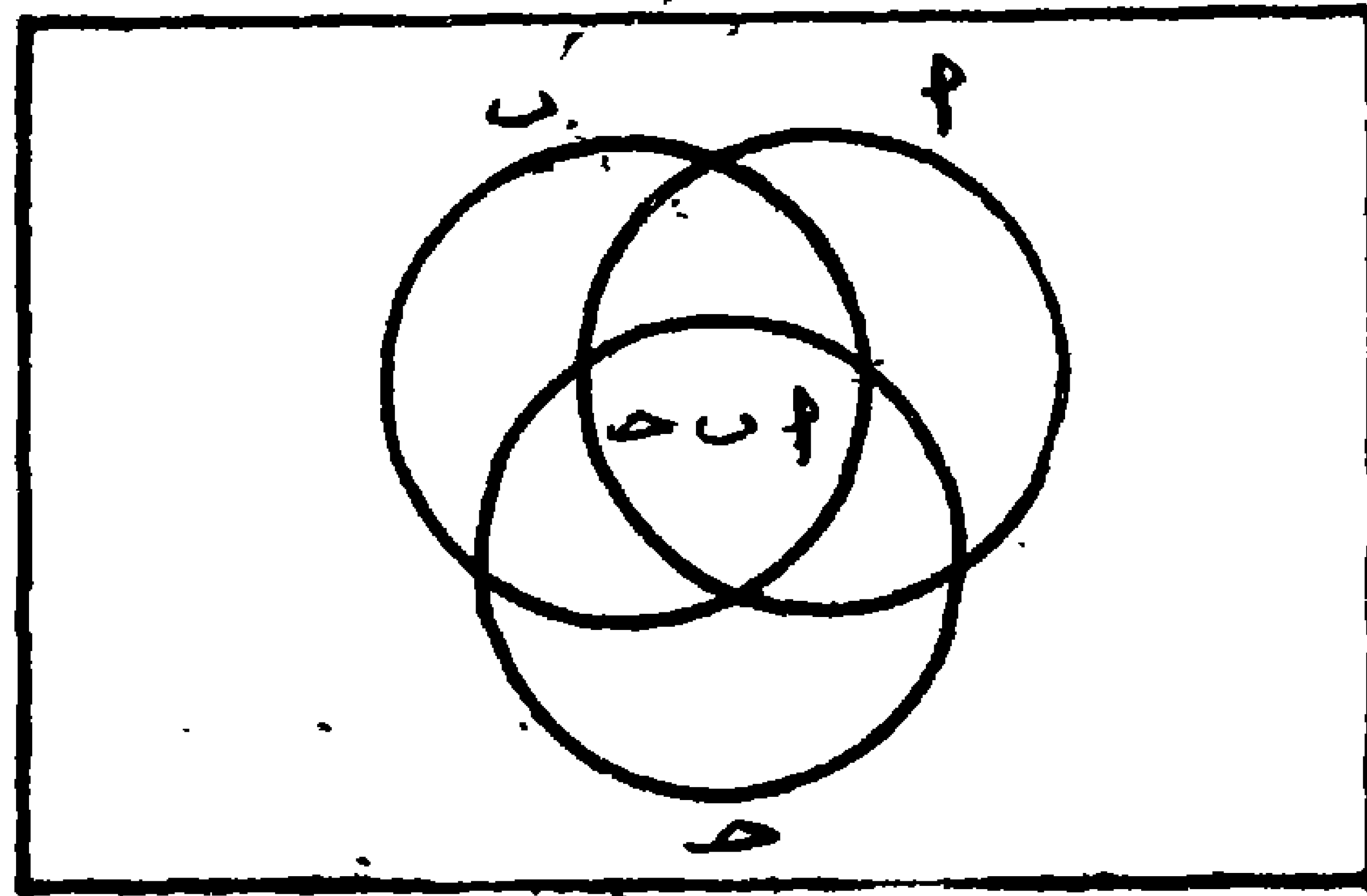
فإذا كانت : اَ = اَ ب + اَ بَ (فى ثانياً)

وإذا كانت : بَ = ا بَ + اَ بَ (فى ثالثاً)

فإن ما هو مشترك بين اَ ، بَ فى وقت واحد هو اَ بَ .

فإذا قارنا بعد هذا التحليل بين $\overline{(\text{ا ب})}$ وبين اَ بَ لوجدنا أن اَ بَ عبارة عن جزء من الفئة $\overline{(\text{ا ب})}$ ، طالما أن $\overline{(\text{ا ب})}$ = ا بَ + اَ ب + اَ بَ .

خامساً — لو أننا وسعنا من شكل فن فجعلناه شاملا لثلاث فئات بدلا من فئتين ، لتبين لنا أن القواعد والملاحظات السابقة تنطبق كذلك فى هذه الحالة الجديدة ، ولنرسم شكل فن محتويا على ثلاث فئات كما يلى : —



شكل ٦

فلو كانت ا تشير مثلا إلى فئة الطلبة ، وكانت ب تشير إلى فئة الناجحين ، وكانت حـ تشير إلى فئة الأذكياء ، لـكان حاصل الضرب المنطقى لهذه الفئات الثلاث ، هو الفئة :

ا ب حـ

أى الفئة التى لو اخترنا أى عضو منها لـكان طالباً ناجحاً ذكياً فى الوقت نفسه.

بعض نتائج الضرب المنطقى للفئات :

١ — ا × ب = ب × ا (١)

فلو كانت ا تعبر عن فئة الطلبة ، وكانت ب تعبر عن فئة الموظفين ، فإن الأمر يستوى لو بدأت بضرب الفئة ا فى الفئة ب أو بالعـكس . إذ سواء كنت أتكلم عن فئة الطلبة الموظفين أو فئة الموظفين الطلبة ، فعدد الأعضاء أو الماصدقات واحد فى الحالتين ، أو بمعنى أكثر دقة إن الماصدقات هى هى نفسها فى الحالتين . لأن الأفراد التى أحصل عليها حين أبدأ من فئة الطلبة (ا) وأفرز منها من هو موظف ، تكون هى نفسها الأفراد التى أحصل عليها لو بدأت من فئة الموظفين (ب) وفرزت منهم من هو طالب .

٢ — ا × ا = ا (٢)

لأننا لو حاولنا أن نختار من بين أفراد الفئة ا ، من يتصف منهم بـكونه ا ، لحصلنا على جميع ما صدقات الفئة ا بأكلها ، لأن كل عضو منهم يتصف بالفعل بكونه ا ، وإلا لما أمكن ابتداء أن يكون عضواً فى هذه الفئة .

---

(١) أو : ا ب = ب ا .

(٢) أو : ا ا = ا .

هذا ويلاحظ أيضا فى هذه الحالة :

أولا : إن هناك اختلافا بين حاصل الضرب فى المنطق وحاصل الضرب فى الحساب والجبر ، لأننا لو ضربنا العدد الواحد فى نفسه – فى الحساب – أو الرمز الواحد فى نفسه – فى الجبر – كان حاصل الضرب فى كلتا الحالتين مختلفا عن الرمز المضروب ، مثل :

٢ × ٢ = ٤ (فى الحساب)

ا × ا = ا^{٢} (فى الجبر)

ا × ا = ا (فى المنطق)

ثانيا : إننا مهما كررنا إجراء ضرب الفئة الواحدة فى نفسها مرة أو مرتين أو ثلاث أو ألف مرة لحصلنا على الفئة نفسها ، لأننا فى كل مرة نقوم فيها بإجراء الضرب إنما نختار من الفئة ا كل الأفراد المتصفة بكونها ا ، فنحصل على جميع أفراد الفئة ا هى هى بعينها .

ولذا فان : ا × ا × ا × ا ..... = ا

٣ — ا × صفر = صفر

أى لو كانت ا فئة ذات أعضاء ، ثم حاولنا أن نفرز منها ونختار الأعضاء التى تنتمى إلى الفئة الفارغة ، أى الأعضاء التى لا وجود لها ، لما حصلنا على أى عضو . ولذا تكون النتيجة هى « صفر » . والواقع أن الفئة الفارغة أو الصفرية يمكن أن تكون نتيجة لأكثر من إجراء من إجراءات ضرب الفئات مثل :

ا — فهى يمكن أن تكون حاصل ضرب أية فئة (مثل ا) × الصفر ، فتكون النتيجة صفراً كما هو الحال فى المثال السابق .

ب — أو أن تكون حاصل ضرب أية فئة فى الفئة المكملة لها مثل (ا × اَ = صفر) . لأننا لو فرزنا أو اخترنا من الفئة ا ، الأعضاء التى لا تكون هى ا (أى التى تكون اَ) ، لما حصلنا على أي عضو ، ومن ثم تكون النتيجة مساوية للصفر .

حـ — أوأن تكون حاصل فئتين لا يمكن وجود أعضاء ينتمون إليهما معاً وفى وقت واحد ، فلو كانت ا ترمز إلى فئة الدوائر ، وكانت ب ترمز إلى فئة المربعات فإن حاصل ضرب الفئتين ا ، ب يكون مساوياً للصفر . لأنه لا وجود لأعضاء ينتمون إلى الفئة ا وإلى الفئة ب فى وقت واحد ، أى لا وجود مثلا لشكل هندسى يكون مربعاً ويكون مستديراً فى وقت واحد ومن وجهة نظر واحدة . وعلى ذلك يكون حاصل ضرب الفئتين مساوياً للصفر على الرغم من أن كلا من الفئتين لها أعضاء وليست بالفئة الفارغة . ومن ثم ، فنى مثل هذه الحالة تكون :

ا × ب = صفر .

ثانياً : الجمع المنطقى

وهو عبارة عن إضافة أعضاء فئة ما إلى أعضاء فئة أخرى ، لتكوين فئة جديدة يكون أعضاؤها ممن ينتمون : إما إلى الفئة الأولى ، أو إلى الفئة الثانية ، أو مما ينتمون إلى الفئتين معاً إذا كانت هناك أعضاء مشتركة بين الفئتين . وتسمى الفئة الناتجة عن هذا الإجراء بإسم حاصل الجمع المنطقى Logical Sum ، أو الفئة الفصلية Disjunctive Class ، وقد سميت بالفئة الفصلية لأن إجراء الجمع هو فى حقيقته فصل بين أعضاء الفئتين المجموعتين ، على الرغم من جمعهما معاً فى فئة

واحدة كبيرة ، بمعنى ان جمع فئتين لا يزيل الفارق بين أعضائهما ، بل تظل أعضاء كل فئة متميزة عن أعضاء الفئة الأخرى ، ولنأخذ المثال التالى لتوضيح ذلك . لنفرض أن أمامى وعاءاً به عدد من الكرات الزرقاء ، وإن لدى إناءاً آخر به عدد من الكرات الحمراء ، فإذا ما وضعت ما فى الوعاء الأول من كرات فى الوعاء الثانى ، لأصبحت لدى مجموعة جديدة من الكرات كل واحدة منها إما أن تكون زرقاء أو حمراء . إذن فالإضافة هنا لم تطمس من معالم أعضاء كل فئة ، بل احتفظت لها بما يميزها عن أعضاء الفئة الأخرى . ولنأخذ مثلا آخر لنزيد المعنى توضيحاً : فلو كنت أتكلم عن فئتين هما : فئة الطلبة (ا) ، وفئة الطالبات (ب) ، فإن حاصل الجمع المنطقى للفئتين يكون هو الفئة التى لو اخترنا منها أى عضو جزافا ، فلابد أن يكون إما طالباً (أى ينتمى إلى الفئة ا) ، وإما طالبة (أى تنتمى إلى الفئة ب) . وهكذا فنحن أمام بديلين لا بدوأن ينتمى إلىأحدهما أىعضو منأعضاء الفئة التى تمثل حاصل جمع الفئتين .

ولذا فإننا عادة ما نعرف حاصل الجمع المنطقى لفئتين بأنه الفئة التى تكون شاملة لكل من الفئتين ، وتكون متضمنه ومحتواه فى أية فئة أخرى تشمل الفئتين ، أو هى أصغر فئة يمكن أن تشتمل على الفئتين ، كما يسمى الأجراء فى مثل هذه الحالات السابقة بإسم الجمع القوى الذى يدل على مايسمى باسم الفصل القوى تميزاً له عن الفصل الضعيف .

الفصل القوى والفصل الضيف :

١ — الفصل القوى Strong Disjunction ، ويرمز له بين الفئات بالرمز (+) الذى يمكن التعبير عنه فى اللغة العربية بالقول « إما . . . أو . . . » ، ويعبر

عنه بالانجليزية : « either ... or ... » ، وباللاتينية « aut ... aut ... » ، ويسمى أحياناً باسم الفصل الاستبعادى Exclusive أو غير الشمولى ، ويفيد القول بإما كذا ، أو كذا ، مع استحالة الجمع بين البديلين . والأمثلة السابقة كلها توضح مثل هذا النوع من الفصل .

٢ — أما الفصل الضعيف Weak Disjunction ، ويرمز له بين الفئات بالرمز « + »(١) الذى يمكن التعبير عنه فى اللغة العربية بالأداة « أو » ، ويعبر عنه بالانجليزية بالكلمة « or » وفى اللاتينية بالكلمة « vel » ، ويسمى أحياناً باسم الفصل الشمولي Inclusive أو غير الاستبعادى ، وهو لا يعنى الفصل الكامل بين الفئتين المجموعتين ، بل يفيد إحتمال إشتراكهما فى عدد من الأعضاء فى الوقت نفسه ، وهذا مايتضح من المثال التالى : لو رمزنا إلى فئة الأدباء بالرمز ا ، وإلى فئة الفلاسفة بالرمز ب ، لكان حاصل جمعهما المنطقى هو الفئة التى تتكون من :—

أولا : كل من هو أديب فقط ولا علاقة له بالفلسفة .

ثانياً : كل من هو فيلسوف فقط ولا علاقة له بالأدب .

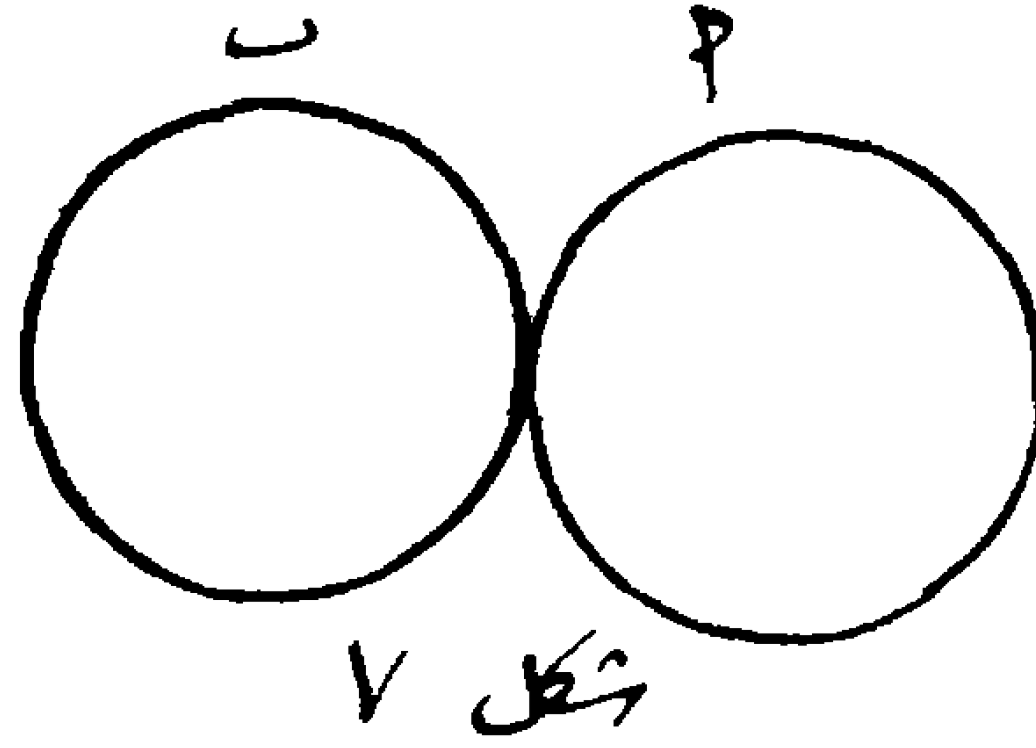
ثالثاً : كل من هو أديب وفيلسوف فى الوقت نفسه (طالمـــا أن بعض الأدباء فلاسفة وبعض الفلاسفة أدباء) .

أى الفئة التى لو اخترنا منها أى عضو جزافاً ، لكان : إما فيلسوفا أو أديبا أو أديبا فيلسوفا أو (فيلسوفا أديبا) فى الوقت نفسه . وهكذا فالفصل الضعيف يفيد معنى الانفصال مع إمكان الاتصال (أى ا أو ب أو هما معاً : ا ب) فى حين أن الفصل القوى يفيد معنى الانفصال مع استحالة الإتصال ، هذا ويمكن التعبير عن إجراء الجمع بنوعى الفصل فيه كما يلي :—

---

(١) وكان بيانو يستخدم العلامة التالية : U

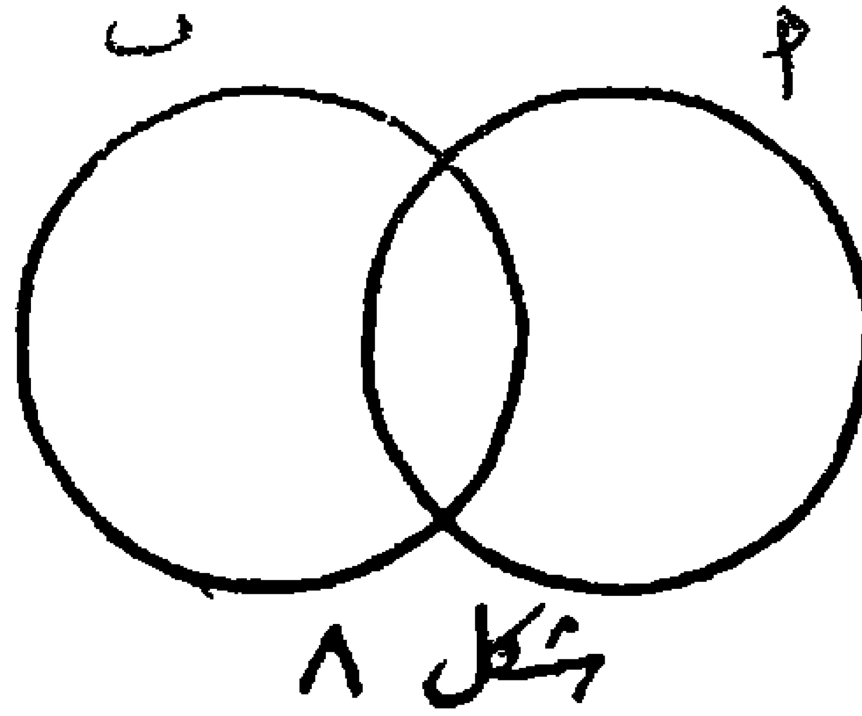
الفصل القوى :



شكل ٧

ويعبر عنه رمزياً كما يلى :   ا (+) ب

الفصل الضعيف :



شكل ٨

ويعبر عنه رمزياً كما يلى :   ا + ب

ونحن نميل إلى استخدام الفصل الضعيف للتعبير عن إجراء الجمع المنطقى بين الفئات جرياً على ما هو متبع فى كثير من كتب المنطق الحديث .

ملاحظات عامة تتعلق بجميع الفئات :

بتطبيق إجراء الجمع المنطقى بالنسبة لشكل فن نلاحظ ما يأتى : —

١ — إن الفئة (ا + ب) — فى الشكل — تتكون من جميع الأعضاء الموجودة فى ا بَ ، ا ب ، اَ ب . ومن ثم فإننا نستنتج :

ا + ب = ا بَ + اَ ب + ا ب

٢ ـــ إن الفئة المكملة للفئة (أ + ب) أى الفئــة $\overline{(\text{أ} + \text{ب})}$ ، تشتمل على كل ما هو ليس (أ + ب) ، أى ما يتبقى من عالم المقـــال لو استبعدنا منه (أ + ب) وما يتبقى فى عالم المقال فى هذه الحالة سيكون هو الفئة أَ بَ . ومن ثم فإننا نستنتج أن :ـــ

$$\overline{(\text{أ} + \text{ب})} = \text{أَ بَ}$$

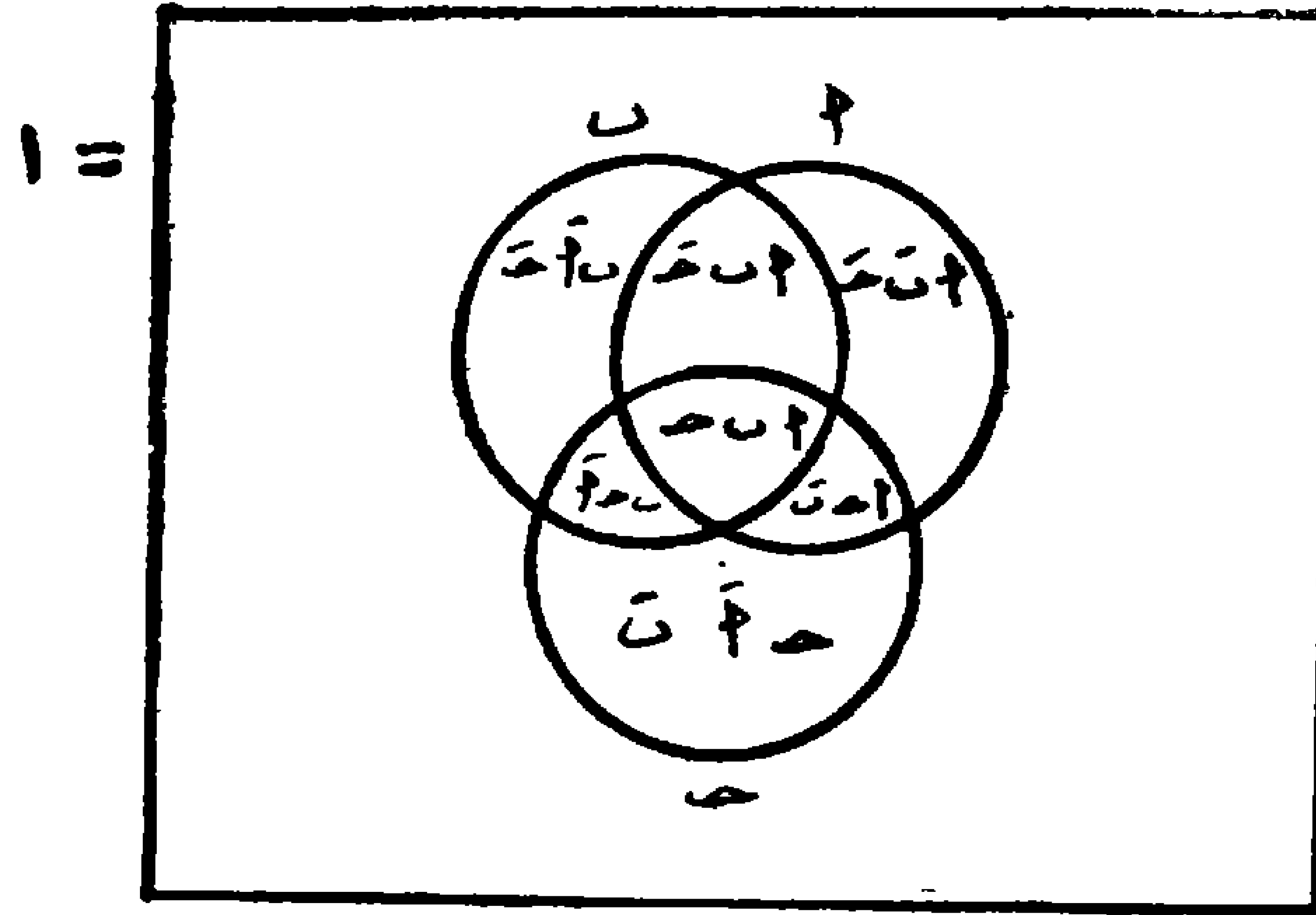
٣ ـــ أننا بإضافة الفئة أ إلى الفئة المكملة للفئة ب ، نحصل على الفئه (أ + بَ)، وتكون الفئة المكملة لها هى : $\overline{(\text{أ} + \text{بَ})}$ وهكذا يمكننا باستخدام إجـــراء الأكمال وإجراء الجمـــع أن نتوصل إلى عدة فئات جديدة ، مثل إضافة الفئة بَ إلى الفئة أَ فنحصل على الفئة (ب + أَ) التى تكون الفئة المكملة لها هى : $\overline{(\text{ب} + \text{أَ})}$ وهكذا .

٤ ـــ علينا أن نميز ولا نخلط بين الفئة $\overline{(\text{أ} + \text{بَ})}$ والفئة أَ + بَ ، أى بين الفئة المكملة لفئـــة هى حاصل جمع فئتين ، وبين حاصل جمع فئتين مكملتين لفئتين . هذا ما يتضح من الشكل الذى نتبين فيه أن :

$$\overline{(\text{أ} + \text{ب})} = \text{أَ بَ}$$

فى حين أن أَ + بَ إنما تساوى : أَ ب + أ بَ + أَ بَ .

٥ ـــ أننا لو وسعنا شكل فن فجعلناه شاملا لثلاث فئات أو أكثر ، بدلا من فئتين ، لتبين لنا أن القواعد السابق استخدامها ، تنطبق كذلك فى هـــذه الحالة الجديدة . ولنرسم شكل فن محتوياً على ثلاث فئات ، على النحو الآتى :ـــ



شكل ٩

فى هذه الحالة يكون حاصل الجمع المنطقى لهذه الفئات الثلاث، أى (ا + ب + ح) معبراً عن الفئة الكبرى التى يتصف أى عضو فيها بأنه ينتمى :

١ — إلى الفئة ا وحدها ، أى (ا بَ حَ) .

٢ — أو إلى الفئة ب وحدها ، أى (ب اَ حَ) .

٣ — أو إلى الفئة ح وحدها ، أى (ح اَ بَ) .

٤ — أو إلى الفئتين ا ، ب فقط ، أى (ا ب حَ) .

٥ — أو إلى الفئتين ا ، ح فقط ، أى (ا ح بَ) .

٦ — أو إلى الفئتين ب ، ح فقط ، أى (ب ح اَ) .

٧ — أو إلى الفئات الثلاث ا ، ب ، ح فى وقت واحد ، أى (ا ب ح) .

هذا ويلاحظ أن الفئة المكملة للفئة (ا + ب + ح) ، هى الفئة $\overline{(ا + ب + ح)}$ التى تناظر وتساوى الفئة (اَ بَ حَ) فى الوقت نفسه . وسنزيد هذه الملاحظة الأخيرة توضيحاً فيما بعد .

بعض نتائج الجمع المنطقى للفئات :

١ — ا + ب = ب + ا

فلو كانت ا ترمز إلى فئة الطلبة ، ب ترمز إلى فئة الطالبات ، فإن حاصل جمع الفئتين منطقياً لن يتغير سواء جمعنا ا إلى ب أو ب إلى ا ، لأننا فى كلتا الحالتين سنحصل على الفئة الكبيرة التى لو اخترنا منها أى عضو جزافاً لوجدناه إما طالباً أو طالبة . وعلى ذلك فسيان لدينا لو بدأنا بجمع فئة الطلبة إلى فئة الطالبات (ا + ب) أو بجمع فئة الطالبات إلى فئة الطلبة (ب + ا) ، فإن عدد ما صدقات حاصل الجمع المنطقى واحدة هى هى .

٢ — ا + ا = ا

أى أن عدد أعضاء الفئة التى تتكون من « إما الأدباء أو الأدباء » ، سيكون هو نفسه عدد أعضاء الفئة المكونة من الأدباء فقط .

ويلاحظ فى هذه الحالة :

أولا : وجود اختلاف بين حاصل الجمع فى المنطق ، وحاصل الجمع فى الحساب والجبر ، لأننا لو جمعنا العدد الواحد إلى نفسه فى الحساب أو الرمز الواحد إلى نفسه فى الجبر ، لكان حاصل الجمع فى كلتا الحالتين مختلفاً عن الرمز المجموع ، مثل :

٢ + ٢ = ٤ (فى الحساب)

ا + ا = ٢ا (فى الجبر)

ا + ا = ا (فى المنطق)

ثانياً : إننا مهما كررنا إجراء جمع الفئة الواحدة إلى نفسها مرة أو مرتين أو ثلاث مرات أو ألف مرة لحصلنا على الفئة نفسها . لأننا فى كل مرة نقوم فيها بإجراء جمع الفئة إلى نفسها ، إنما نقول بأعضاء الفئة ذاتها كأن نقول مثلا : « الفلاسفة أو الفلاسفة » ، ويستوى الأمر سواء كررنا ذلك مرة أو أكثر فإن نتيجة ذلك هى هى نفسها أعضاء الفئة الأصلية المجموعة .

٣ — ا + صفر = ا

أى أن عدد أعضاء الفئة الناتجة عن جمع أية فئة معلومة ، إلى فئة خالية من الأعضاء لن يزيد عن عدد أعضاء الفئة المعلومة . فلو كانت ا ترمز إلى فئة الأدباء ، كان عدد أعضاء الفئة المكونة إما من أعضاء فئة الأدباء ، أو من أعضاء لا وجود لها ، لا يزيد عن أعضاء فئة الأدباء .

ثالثاً : الطرح المنطقى

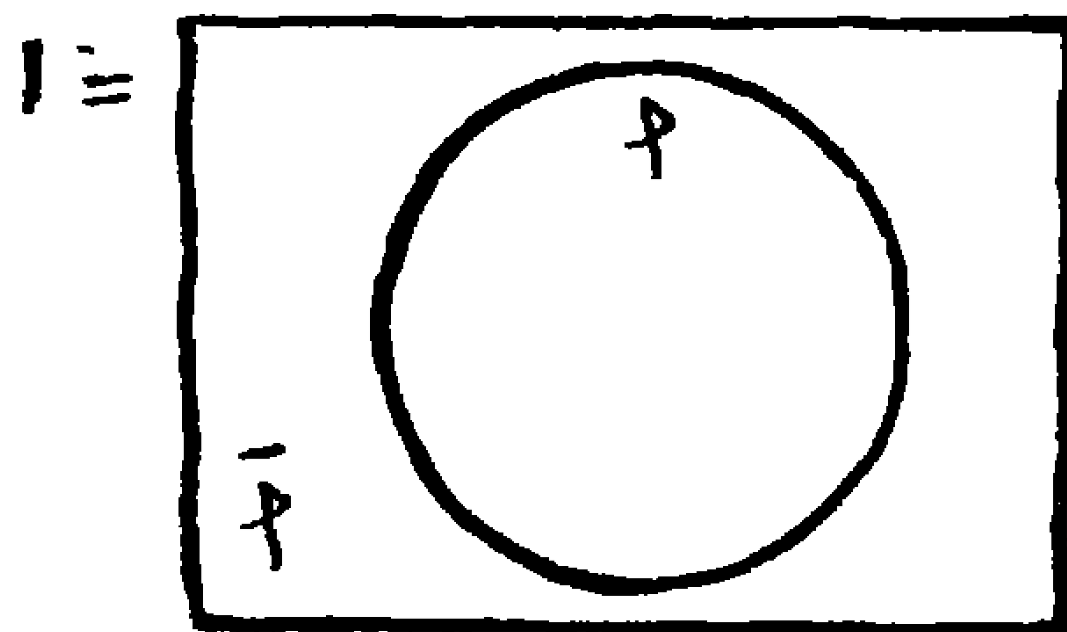
Logical Subtraction

بما أن عالم المقال ، وهو الواحد الصحيح ، يتكون دائماً من أية فئة ، والفئة المكملة لها مثل : (١ = ا + اَ) ، فإن أياً من الفئتين يساوى دائماً الواحد الصحيح وقد استبعدنا منه الفئة الأخرى . ولذا فإن :—

١ — ا = ١ — اَ

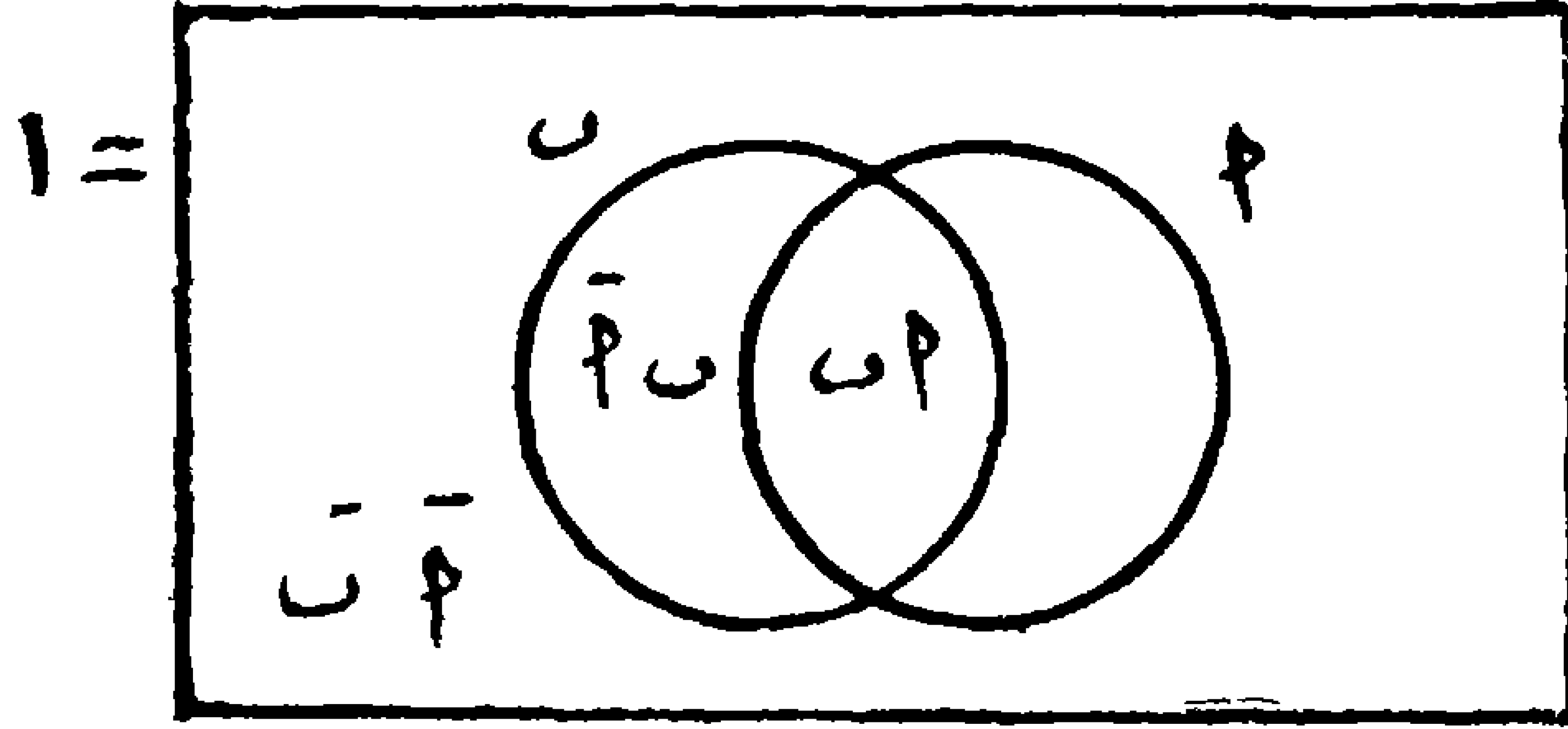
٢ — اَ = ١ — ا

وهذا ما يتضح من الشكل التالى :



شكل ١٠

ولو أننا وسعنا الشكل السابق فأصبح على النحو الآتى :ـــ



شكل ١١

لكانت الفئة $\bar{ا}$ مساوية لكل ما هو غير منتمى إلى الفئة ا فى عالم المقال ، أى: (ب $\bar{ا}$) ، ($\bar{ا}$ $\bar{ب}$) .

وعلى ذلك فإن : $\bar{ا} = ب\bar{ا} + \bar{ا}\bar{ب}$

وبما أن $ا = ١ - \bar{ا}$

∴ $ا = ١ - (ب\bar{ا} + \bar{ا}\bar{ب})$.

وبما أن $\bar{ا} = ١ - ا$

∴ $ب\bar{ا} + \bar{ا}\bar{ب} = ١ - ا$.

رابعاً : الإجراء المركب من الضرب والجمع المنطقيين

مثل : $حـ (ا + ب) = حـ ا + حـ ب$.

أى أن أعضاء الفئة حـ التى تتصف بكونها إما ا أو ب ، تكون هى هى نفسها أعضاء الفئة المكونة من :

١ ـــ الأعضاء الذين ينتمون إلى حـ ويتصفون بكونهم ا .

٢ ـــ أو الأعضاء الذين ينتمون إلى حـ ويتصفون بكونهم ب .

ولنوضح ذلك بالمثال التالى[1] : فلو كانت ح تشير إلى فئة طلبة الجامعة، وفرزنا منها الأعضاء الذين هم إما طلبة كلية الآداب (ا) ، أو طلبة كلية العلوم (ب) ، فإن الأعضاء التى نحصل عليها تكون هى هى نفسها أعضاء الفئة المكونة إما من طلبة الجامعة بكلية الآداب (ح ا) أو من طلبة الجامعة بكلية العلوم (ح ب) .

ومما هو جدير بالملاحظة أن التعبير الرمزى « ح (ا + ب) » كله يعبر عن فئة ، وكذلك الحال بالنسبة للتعبير الرمزى : « ح ا + ح ب » .

خامساً : الإجراء المركب من الجمع والطرح المنطقيين

ا : مثل ا = ١ — (ب + ح) .

فإذا كان عالم المقال ، وهو الواحد الصحيح ، يتكون من ثلاث فئات هى ا ، ب ، ح التى تشير إلى فئات الأطفال والشباب والشيوخ على الترتيب ، لكان عالم المقال (أى المجتمع) مكونا من هذه الفئات الثلاث معاً .

فإذا كنا نتكلم عن فئة الأطفال (ا) فى المجتمع ، كان علينا أن نستبعد منه كل ما لا ينتمى إلى فئة الأطفال ، أى كل ما هو اَ .

وبما أن اَ فى هذه الحالة تساوى أعضاء الفئة المكونة إما من الشباب (ب) أو الشيوخ (ح) ، فإن اَ = ب + ح .

ولذا فإن : ا = ١ — (ب + ح)

وبالمثل فإن : ب = ١ — (ا + ح) .

وكذلك فإن : ح = ١ — (ا + ب) .

---

(١) والمثال مأخوذ من المثال الذى أورده الدكتور زكى نجيب محمود فى كتابه « المنطق الوضعى » الجزء الأول ، الطبعة الرابعة ، صفحة ١٩٠

ب : كما أن من الإجراءات ما يتخذ إزاء الفئات بالإضافة إلى العلاقات ، فتنتج عنها قضايا لا فئات . وسنسمى القضايا فى هذه الحالة باسم قضايا الفئــات Class Propositions ، أى القضايا المكونة من فئات ، تمييزا لها عن القضايا التى ينظر إلى كل منها ككل ، لا من حيث مكوناتها .[1] وفيما يلى بعض هذه القضايا :

١ — قضايا هوية الفئة Class Identity

وهى تلك القضايا التى تثبت الهوية المنطقية بين فئتين . والهوية identity بين الفئات تعنى وجود تطابق ذاتى بين أعضائها ، فقولى إن الفئتين ا ، ب بينهما هوية ، إنما يعنى أن الفئتين لهما نفس الأعضاء ، أو أنهما متطابقتان . ويمكن التعبير رمزيا عن هذا المعنى على النحو الآتى :

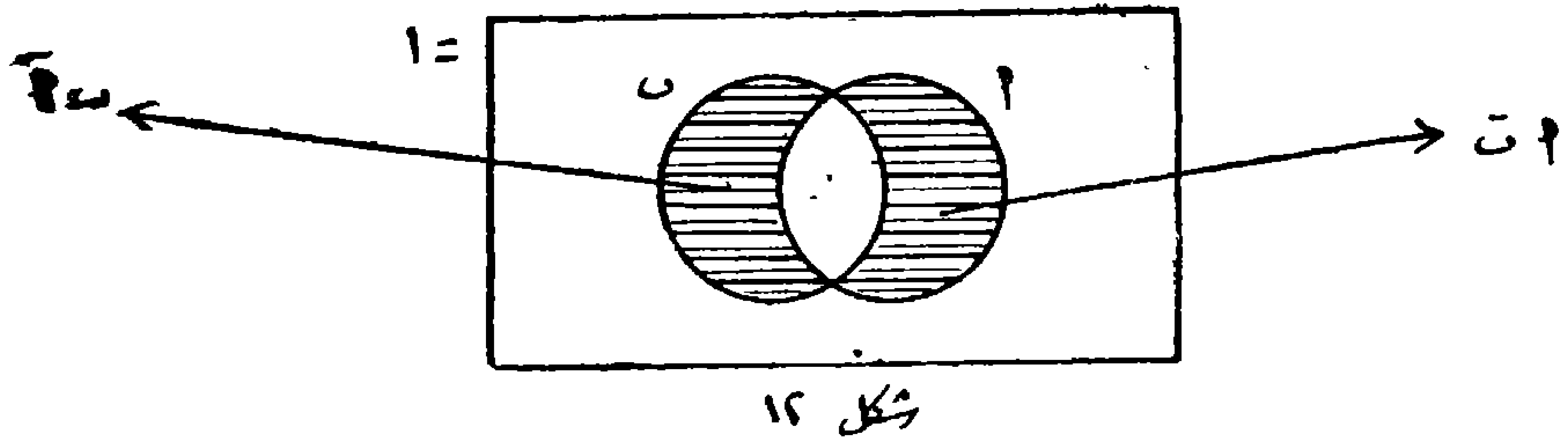
ا = ب

ويلاحظ فى هذه الحالة أن العلامة « = » هنا لا تعنى مجرد التساوى الحسابى أو العددى ، بل تعنى الهوية بين الفئتين بالمعنى سالف الذكر . والفرق بين التساوى العددى وبين الهوية واضح ، ويمكن التعبير عنه بالقــول بأن كل هوية تستلزم التساوى العددى ، فى حين أن التساوى العددى لا يستلزم الهوية بالضرورة . فلو كانت الفئتان التاليتان : ا (فئة الكتب) ، ب (فئة الاقلام) ، متساويتين عدديا ، لما ترتب على هذا ان تكون الكتب هى الاقلام ولا الاقلام هى الكتب ، ومن ثم فالتساوى هنا لا يستلزم الهوية بينهما . أما لو كانت الفئتان التاليتان : ا

(١) ويجدر بنا أن نلاحظ فى هذا الصدد أن الحديث هنا عن القضايا لا يتعلق بنظريه القضايا أو بالحساب التحليلى الخاص بالقضايا فى المنطق المعاصر ، إنما يتعلق أساسا بالحساب التحليلى الخاص بالفئات .

(فئة طلبة السنة الثالثة بقسم الفلسفة) ، ب (فئة من يدرسون المنطق المعاصر) بينهما هوية ، فإن هذا يستلزم التساوى العددى بينهما .

ويمكن التعبير عن الهوية بين الفئتين ا ، ب — باستخدام شكل فن — مع تظليل الفئات الفارغة أو المساوية للصفر ، على النحو الآتى : —



شكل ١٢

ويمكن تفسير الرسم السابق كما يلى : —

إذا كانت هناك هوية بين الفئتين ا ، ب فلن يكون هناك إذن وجود لأعضاء تنتمى إلى ا ولا تكون منتمية إلى ب . ولا لأعضاء تنتمى إلى ب ولا تكون منتمية إلى ا . أى :

أولا : أن تكون الفئة ا الخارجة عن ب أو (ا ب̅) فئة خالية من الأعضاء .

ثانيا : وأن تكون كذلك الفئة ب الخارجة عن ا أو (ب ا̅) فئة خالية من الأعضاء .

٢ — قضايا عدم الهوية بين الفئات .

وتمثل لها بالصيغة التالية :

ا ≠ ب

وتقرأ : ا لا تتطابق ذاتيا مع ب ، أو ليست فى هوية معها . ويلاحظ اننا لا نستطيع تمثيلها بواسطة شكل واحد فقط من أشكال فن وذلك لأن إثبات القول بعدم وجود هوية بين الفئتين ا ، ب قد يعنى : —

١ — أن الفئة ا تشتمل على أعضاء خارجة عن نطاق الفئة ب .

٢ — أو أن الفئة ب تشتمل على أعضاء خارجة عن نطاق الفئة ا .

٣ — أو أن تكون كل من الحالتين السابقتين صادقة ، بمعنى أن كلا من الفئتين ا ، ب تشتمل على أعضاء ، لكنها أعضاء غير مشتركة بين الفئتين .

كما يلاحظ أننا لا نستطيع تمثيل عدم الهوية بين الفئتين بتظليلهما في شكل فن . فنحن يمكن أن نظلل الفئات في الشكل الخاص بالقضية (ا = ب) — على النحو الذى فعلناه في الشكل السابق رقم ١١ — لأن هذا الإثبات للهوية يعنى :

أولا : عدم وجود أعضاء في الفئة ا بحيث تكون خارجة عن ب ، أو في الفئة ب بحيث تكون خارجة عن ا .

ثانياً : أنه لو وجدت أعضاء في الفئة ا أو الفئة ب بالفعل ، فستكون هذه الأعضاء مشتركة بين الفئتين .

إلا أننا لا نستطيع أن نفعل هذا في حالة عدم الهوية ، لأن القضية ا ≠ ب ليست تعبيراً عن افتراض وجود أعضاء في الفئتين ، إنما هى تقرير وإثبات بوجود عضوية فعلية بالنسبة للفئة ا مما هو ليس ب ، أو بالنسبة للفئة ب من الأعضاء التى ليست ا . ولذا فعلينا إذا أردنا التعبير عن هذه القضية باستخدام شكل فن ، أن نلجأ إلى طريقة أخرى للتعبير عن العضوية الفعلية في الفئة ، وذلك كما يلي : بأن نضع علامة مثل « √ » في الشكل ، لكى تعبر عن أن الفئة التى توضع عليها هذه العلامة ، ليست بالفئة الفارغة ، بل :

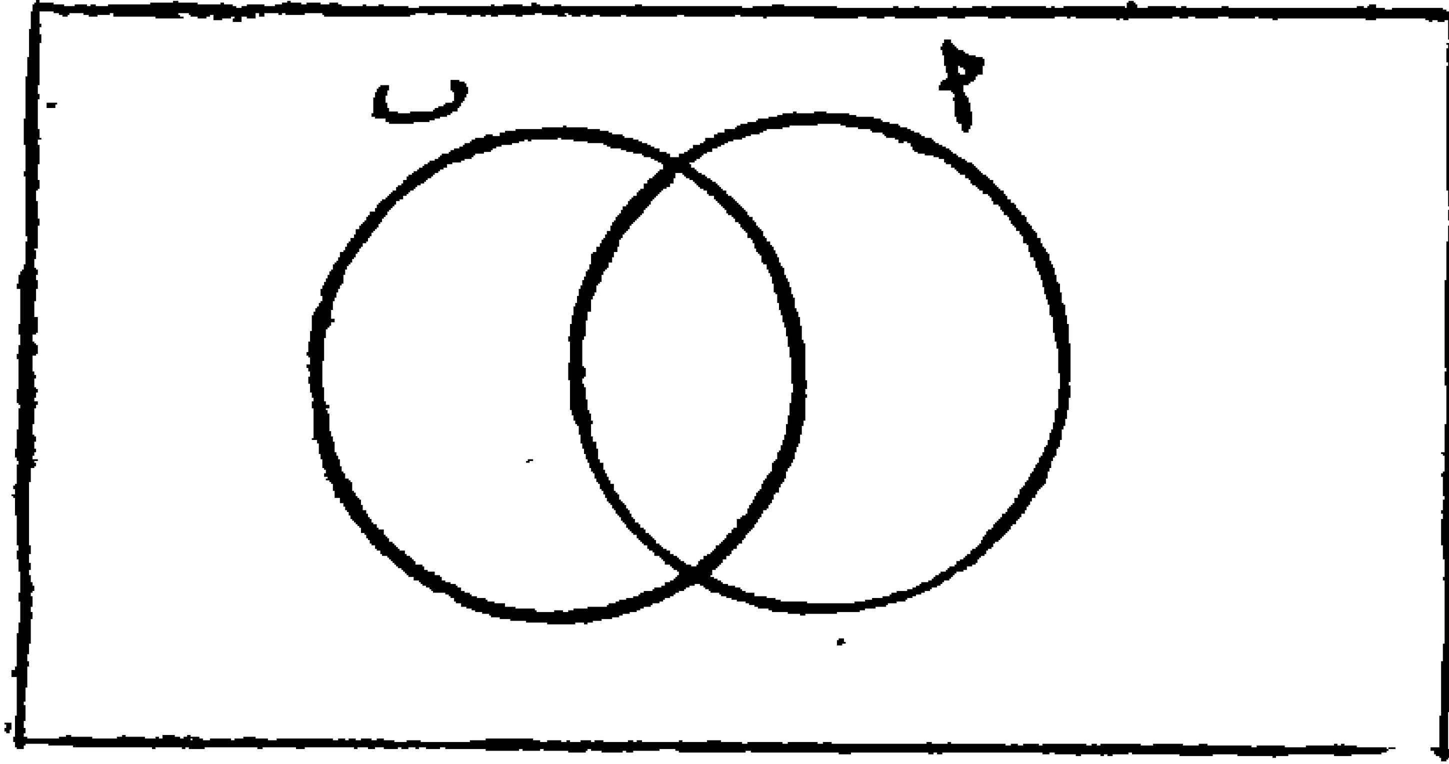
١ — أنها تحتوى على عضو واحد على الأقل .

٢ — وأن هذا العضو غير محدد أو معروف بالذات .

وهكذا تكون القضية : ا ≠ ب

قضية صادقة، إذا صدقت أى واحدة من القضايا التى تعبر عنها الأشكال التالية :

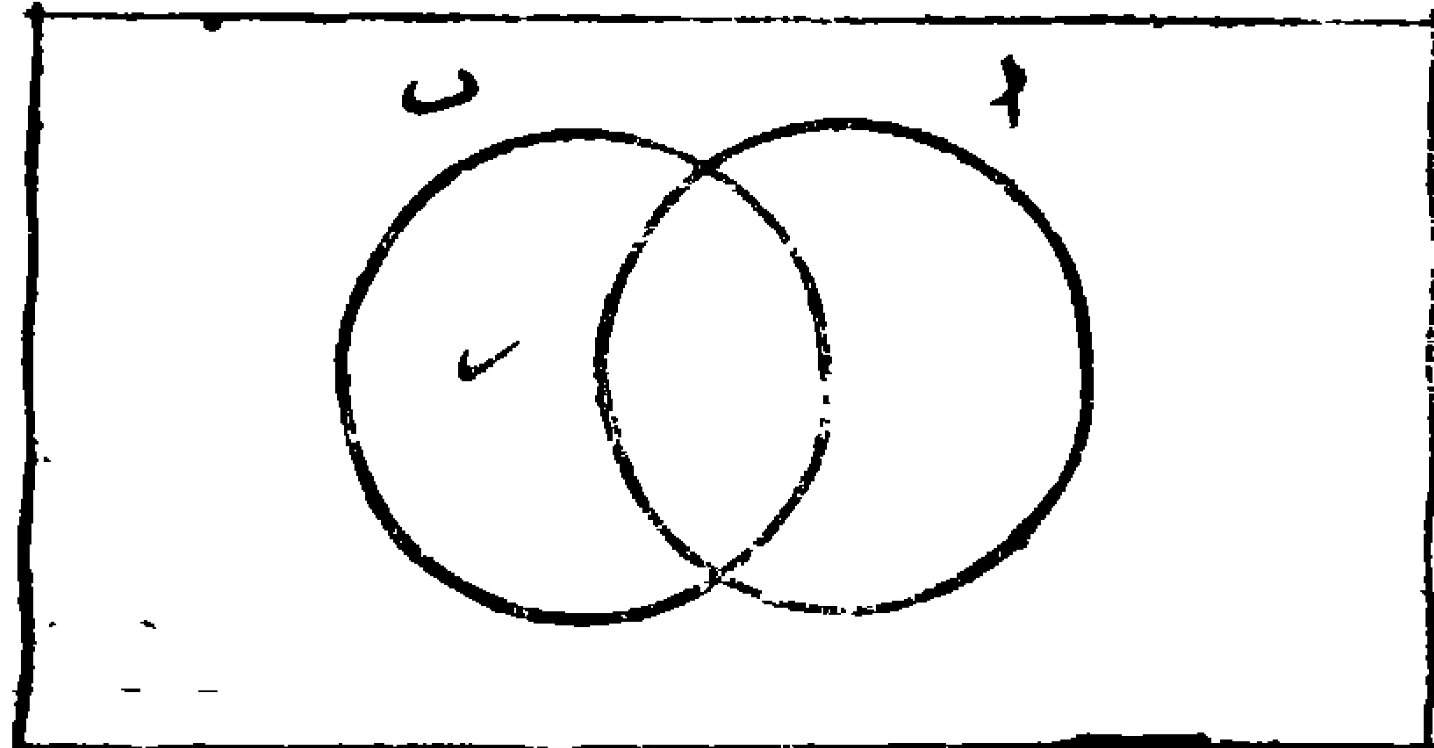
١ =



أى أن : ١ ≠ أ ب

شكل ١٣

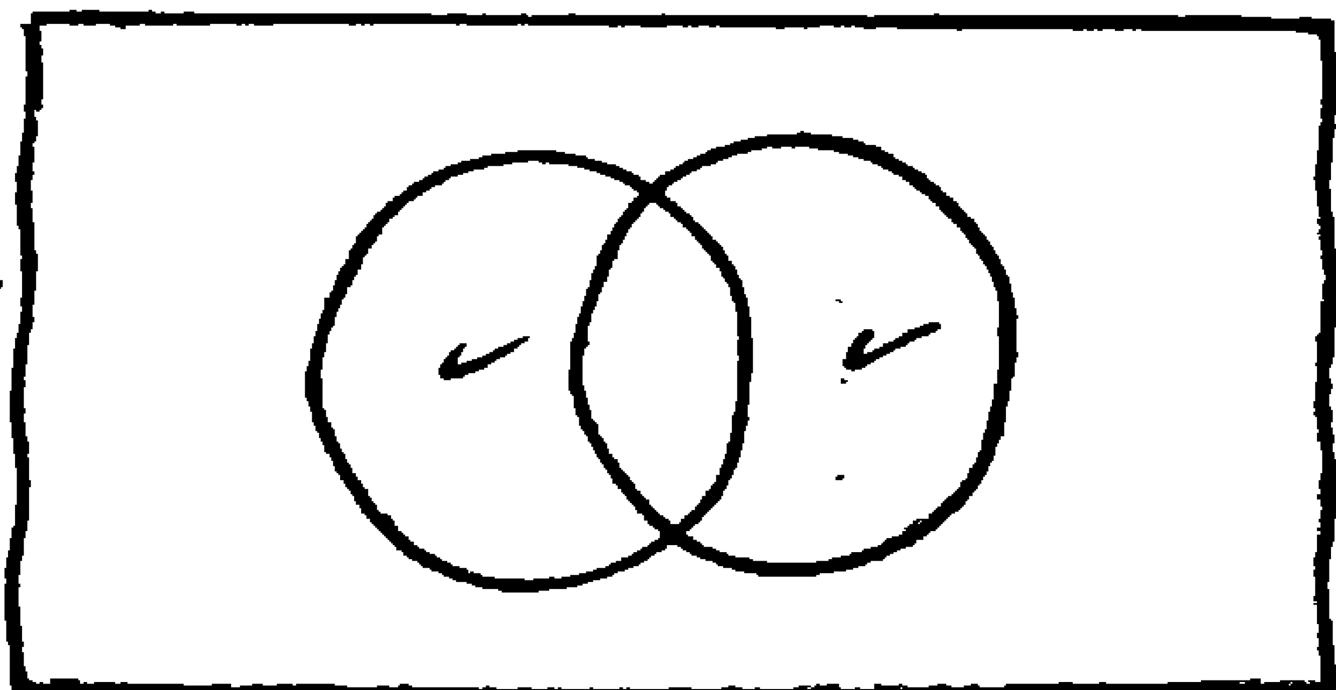
١ =



أى أن : ب ≠ أ ب

شكل ١٤

١ =



أى أن : أ ≠ أ ب . ب ≠ أ ب

شكل ١٥

وبعبارة أخرى ، لو كانت ا تشير إلى فئة « المصريين » ، ب تشير إلى فئة « المسلمين » فإن القضية ا ≠ ب تكون صادقة لو وجد فرد واحد من المصريين ولم يكن مسلماً ، أو فرد واحد من المسلمين ولم يكن مصرياً ، أو إذا وجدا معاً « المصرى غير المسلم والمسلم غير المصرى » .

ومما هو جدير بالملاحظة أن كل شكل من الأشكال السابقة ، والتى يكفى كل واحد منها لتأكيد صدق القضية ا ≠ ب ، يمكن التعبير عنه رمزياً على أنه يمثل قضية خاصة . فالشكل رقم ١٣ لا يوضح فقط أن ا ليست فى هوية مع ب ، بل يوضح بشكل أكثر دقة أنها ليست فى هوية مع ا ب . ومن ثم فالقضية التى يعبر عنها الشكل يمكن صياغتها رمزياً ، على النحو الآتى : ا ≠ ا ب .

وبالمثل تكون القضية التى يعبر عنها الشكل رقم ١٤ ، رمزياً ، كما يلى : ب ≠ ا ب ، كما يمكن التعبير بطريقة رمزية عن القضية التى يعبر عنها الشكل رقم ١٥ ، على أنها إثبات مزدوج للقضيتين اللتين يعبرعنهما الشكلان رقم ١٣ ، ١٤.

٣ — قضايا العضوية المفردة :

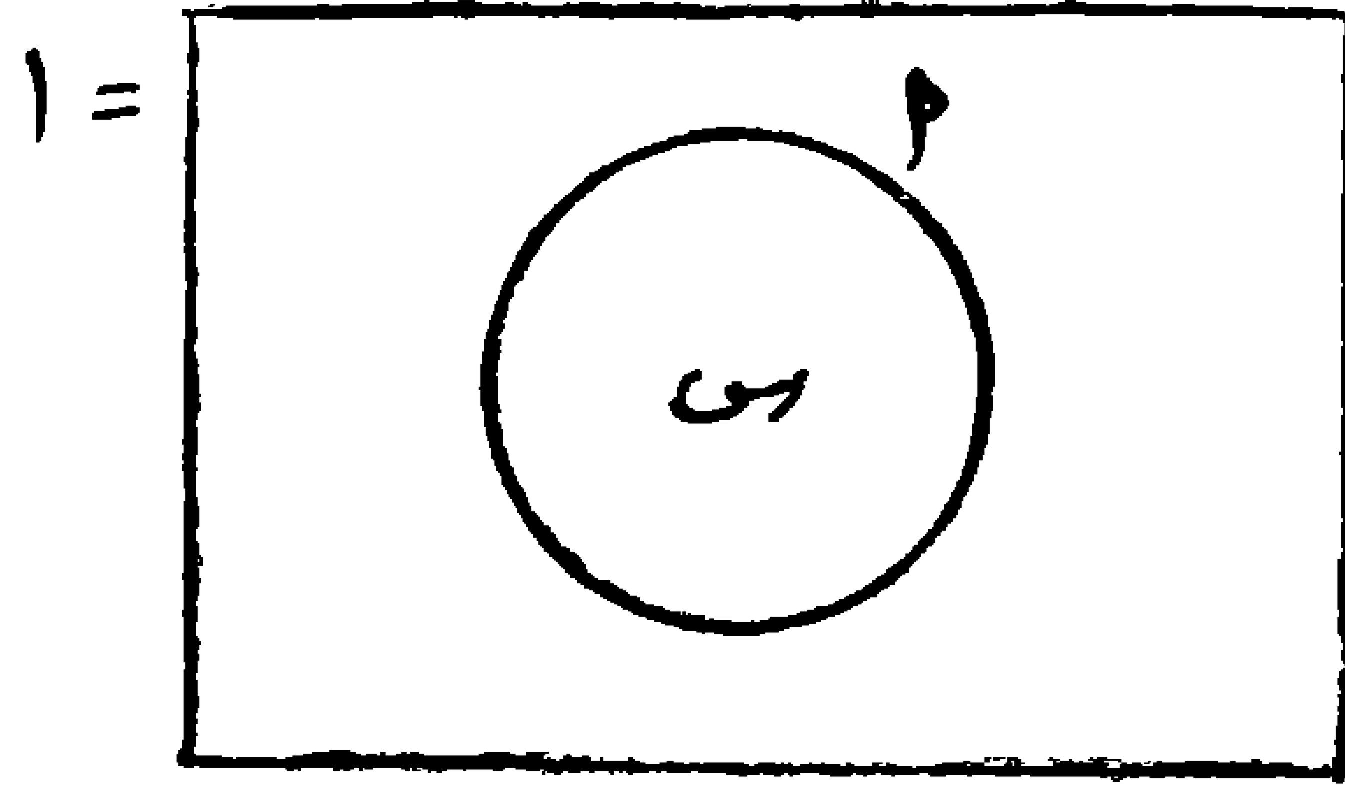
وهى القضايا التى تعبر، لا عن كون الفئه ذات عضو واحد ، إنما تعبر عن انتماء عضو واحد مفرد إلى فئه معينة . وعادة ما يرمز لعلاقة عضوية فرد فى فئة باستخدام الرمز « ∈ » (١) كما أننا عادة ما نستخدم رموزاً للتعبير عن الجزئيات المفردة تختلف عن رموز الفئات . وكما أننا نستخدم للفئات حروف الهجاء التى تبدأ من ا مثل : ا ، ب ، حـ ، . . . فإننا نستخدم للمفردات أو الأعضاء الجزئيـة الحروف س ، ص ، ... وذلك أمر ضرورى طالما أن حديثنا عن الفئات يكون على مستوى

(١) وهى فى أصلها الحرف اليونانى Epsilon ويرجع الفضل فى استخدام هذا الرمز إلى عالم المنطق الإيطالى بيانو فى مؤلفه الكبير « الصيغ الرياضية » .

يختلف عن مستوى حديثنا عن الأعضاء المفردة التي يمكن أن تندرج تحت هـذه الفئات (١) . وهكذا يمكن التعبير رمزياً عن اندراج عضو واحد مفرد في فئة ما ، على النحو الآتي :

س ⋶ ا

وتقرأ : « س عضو في الفئة ا » . ويمكن أن نعبر عن هذه القضيـة بالرسم التالي الذي يظهر « س » كأحد أعضاء الفئة ا :—



شكل ١٦

ويلاحظ أننا لن نحتاج إلى رمز جديد للتعبير عن نفي العضوية المفردة ، مثلما احتجنا لرمز يعـبر عن عدم الهوية (≠) ، لأن نفي قولنا أن تـكون « س » عضواً في الفئة ا ، مرادف للقول بأن س عضو في الفئة المـكملة للفئة ا ، أي اَ .

وعلى ذلك يكون نفي القضية (س ⋶ ا) ، هو إثبات القضية :

س ⋶ اَ .

---

(١) والواقع أن مثل هذه التفرقة ضرورية في المنطق المعاصر لحل كثير من مشكلات المنطق بل والفلسفة التي تنتج عن الخلط بين مستويات وأنماط اللغة المختلفة . ارجع إلى نظرية الأنماط عند رسل وما يترتب عليها من نتائج .

٤ — قضايا الفئة الشاملة والفئة الفارغة :

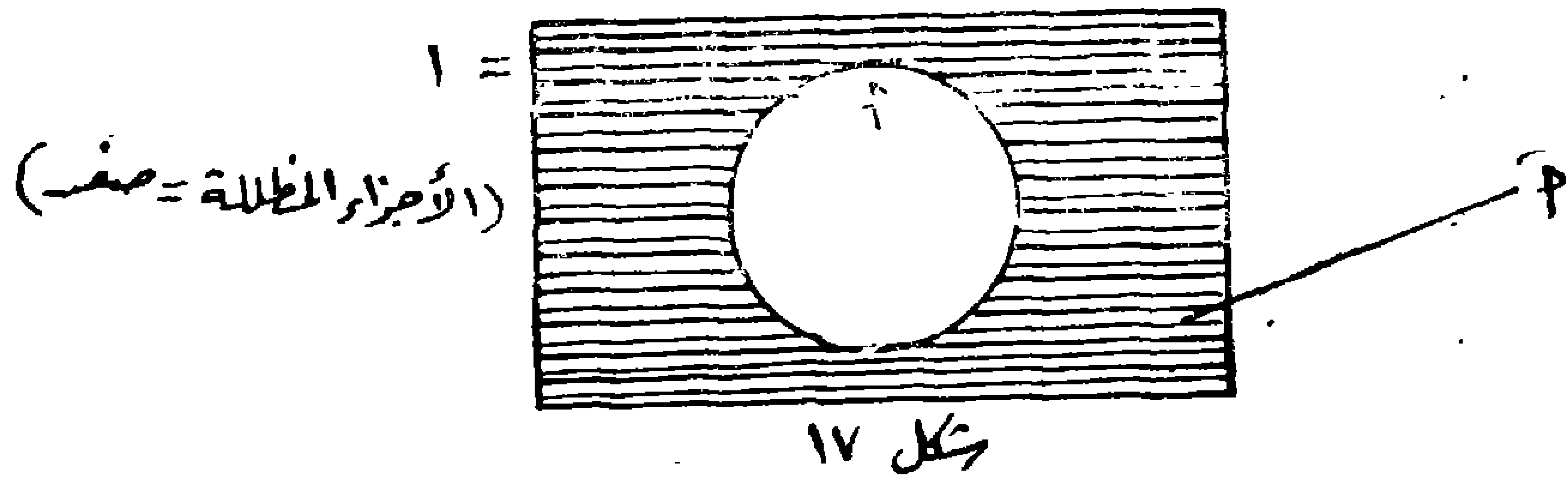
(أ) قضايا الفئة الشاملة : The Universe Class propositions[1]

لقد كان من الضرورى — لتفسير طبيعة الفئة المكملة لفئة ما — تقديم مفهوم عالم المقال ، أو الفئة الأوسع والأكثر شمولا ، أو التى يمكن أن تكون شاملة لأية فئة مما يمكن أن تندرج تحتها .

والواقع أن عالم المقال نفسه فئة ، ويمكننا تسميته بالفئة الشاملة The Universe Class — وهو يناظر بطريقة غير دقيقة فكرة الجنس فى التعريف الأرسطى — وقد أمكن التعبير عن هذه الفئة باستخدام مفهومى الفئة المكملة والجمع كما يلى :

$$١ = أ + أَ$$

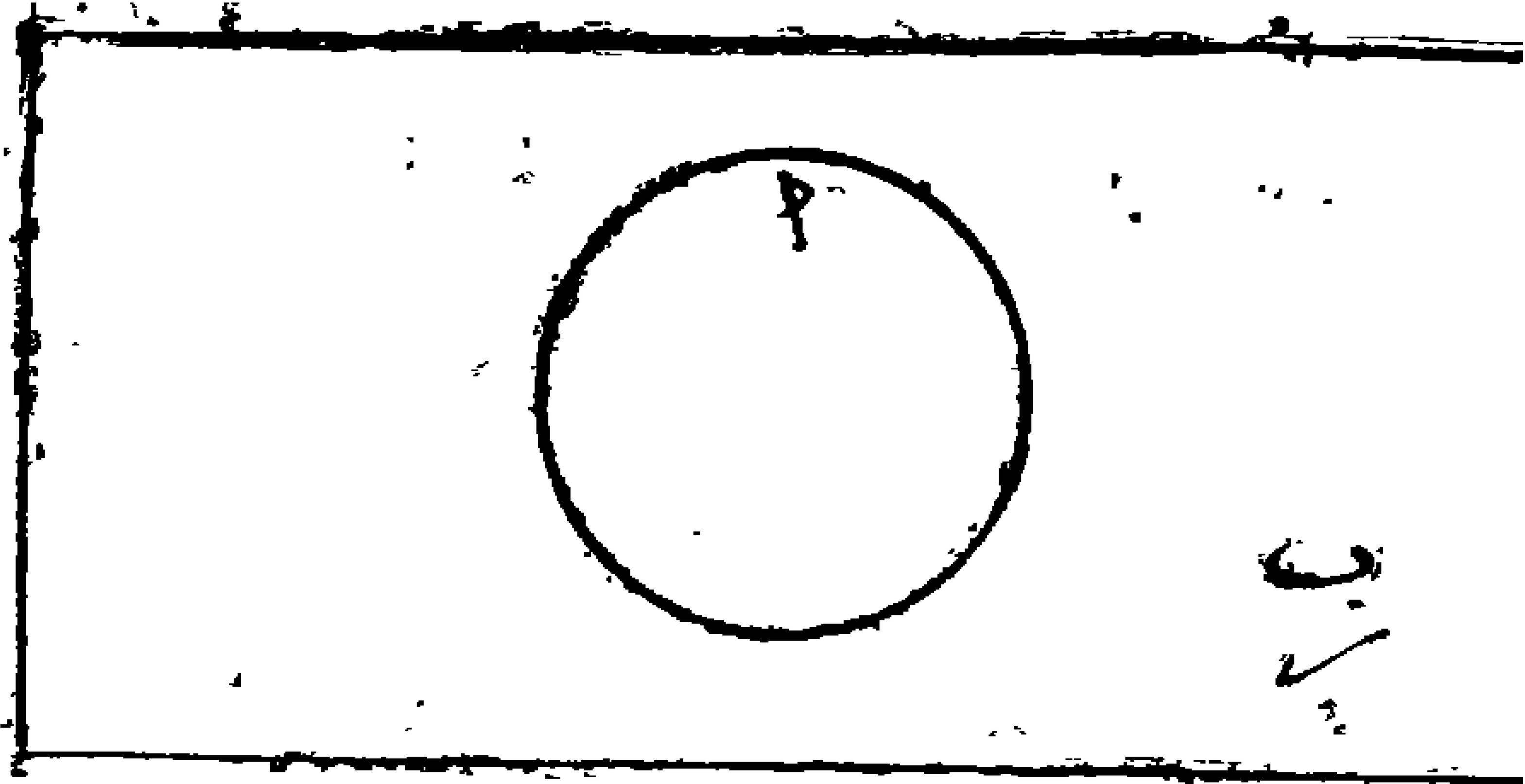
هـذا ويلاحظ أن علاقة الهوية أو عدم الهوية يمكن أن تنشأ بين الفئة الشاملة وبين أية فئة أخرى ، وذلك ما يتضح من الرسم التالى :



شكل ١٧

الذى يعبر عن الهوية بين الفئة أ والفئة الشاملة ، أى أن : أ = ١ .

أما فى حالة عدم الهوية بين أ وبين الفئة الشاملة ، فإن الأجزاء المتبقية فى عالم المقال (أى : أَ) لن تكون مساوية للصفر ، بل تكون ذات أعضاء . فإذا ما رمزنا للفئة أَ بالرمز ب ، استطعنا أن نرسم الشكل التالى :



شكل ١٨

ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلى :—

ب ≠ ١

كذلك ا ≠ ١

هذا فضلا عن كون ا + ب = ١

(ب) قضايا الفئة الفارغة أو الصفرية :

ذكرنا من قبل أن الفئة المكملة للفئة الشاملة ، هى الفئة الفارغة ، من حيث أنها « فئة جميع الفئات التى لا أعضاء لها » . وعلى ذلك يمكن تعريف الفئة الفارغة (أو الصفرية) ، بواحدة من قضيتى الهوية التاليتين :—

(١) صفر = ١َ

(٢) صفر = ا × اَ

إذ أن القضية الأولى تفيد أن الفئة الفارغة تتطابق ذاتياً مع الفئة المكملة للفئة الشاملة أو أنها فى هوية معها . وبما أن الفئة الشاملة تحتوى بالفعل على جميع الفئات ذات الأعضاء فإن الفئة الفارغة إذن تكون فى هوية مع لا شىء ، أى الصفر .

والقضية الثانية (صفر = ا × اَ) تفيد أن الفئة الفارغة ، تتطابق ذاتياً مع

الفئة الناتجة عن حاصل ضرب أية فئة فى الفئة المكملة لها . أو أنها فى هوية معها . لكن ما هو مشترك بين أية فئة ، والفئة المكملة لها ، هو لا شىء . لذا فإننا ننتهى إلى نفس المعنى الذى حصلنا عليه من القضية الأولى .

هذا ويلاحظ أن باستطاعتنا التعبير عن قضايا الفئة الشاملة باستخدام قضايا الفئة الفارغة ، وبالعكس ، طالما أن الفئتين الشاملة والفارغة تكملان إحداهما الأخرى . فلو رجعنا إلى الأشكال السابقة ، للاحظنا أن (ا = ١) مثلا يمكن التعبير عنها بالقول :

(اَ = صفر) . [شكل ١٦] ، كما أن القضية (ا ≠ ١) يمكن التعبير عنها بالقول (اَ ≠ صفر) .

بعض القوانين الابتدائية الخاصة بحساب الفئات : (١)

لكى يمكننا إقامة الحساب التحليلى للفئات ، علينا أن نذكر أولا المبادىء الأساسية والقوانين التى تحدد بوضوح طبيعة الإجراءات والعلاقات المتعلقة بالفئات والتى تسهل علينا عمليات الاستدلال المختلفة . وفيما يلى أهم هذه القوانين (وقد سبق أن أشرنا إلى بعضها أثناء العرض السابق) :—

١ — قانون الهوية Law of Identity

ويمكن التعبير عنه بأكثر من صيغة مثل :—

أولا : ا ⊃ ا (٢)

---

(١) Cohen, M. & Nagel, E. : An Introduetion to Lgic. P. 123.

(٢) سوف نستخدم العلامة « ⊃ » فى حساب الفئات للتعبير عن علاقة اندراج فئة فى فئة أخرى أو اشتمال فئة على فئة أخرى . فالقول : ا ⊃ ب يعنى أن الفئة ا مندرجة تحت الفئة ب أو منتمية إليها ، وبالعكس فالفئة ب تكون شاملة لفئة ا . ومما هو جدير بالذكر أننا سوف نستخدم هذه العلامة نفسها فيما بعد للدلالة على اللزوم بين القضايا ، وذلك أثناء عرضنا لحساب القضايا ، أو لقضايا الفئة .

أى أن أية فئة تـكون مشتملة على ذاتها ، وتـكون فى الوقت نفسه متضمنة فى ذاتها . وهو نفس القانون الذى سبق التعبير عنه من قبل كما يلى :

ثانيا : ا = ا .

٢ — قانون التناقض Law of Contradiction

ويسمى أحيانا باسم مبدأ عدم التناقض ، ويعبر عنه كما يلى : —

ا × اَ = صفر .

ويقرأ : لا يوجد عضو واحد مشترك بين الفئتين ا ، اَ .

٣ — قانون الوسط المرفوع :

ويتمثل فى التعبير : ا + اَ = ١

ويعنى أن أى فرد نختاره من عالم المقال سوف يكون منتميا إما إلى الفئة ا أو الفئة اَ .

٤ — قانون النفى المزدوج Law of Double Negation :

ويعبر عنه بالصيغة التالية ا = اً

ويعنى أن أية فئة تـكون فى هوية ، أو متطابقة ذاتيا مع الفئة المـكملة ، للفئة المـكملة لها هى نفسها . فلو كانت لدينا الفئة ا ، كانت الفئة المـكملة لها هى اَ ، وكانت الفئة المـكملة لهذه الفئة الجديدة هى اً .

٥ — قانون تحصيل الحاصل Law of Tautology :

ويتمثل فى : أولا : ا × ا = ا

ثانيا: ا + ا = ا

٦ — قانونا التبادل Laws of Commutation :

أو قانونا تبادل الحدود(١) ، ويعبر عنهما كما يلى : —

أولا : ا × ب = ب × ا (فى حالة الضرب المنطق)

ثانيا : ا + ب = ب + ا (فى حالة الجمع المنطق)

ويمكن التعبير عن معنى التبادل بأن ترتيب المتغيرات — أو الرموز المعبرة عن الحدود أو الفئات — فى حاصل ضرب أو جمع الفئات ، لا يؤثر على معناها .

٧ — قانونا الترابط Laws of Association (٢)

ويعبر عنهما كما يلى : —

أولا : ا (ب × حـ) = ب (ا × حـ) = حـ (ا × ب)
فى حالة الضرب .

ثانيا : ا + (ب + حـ) = ب + (ا + حـ) = حـ + (ا + ب)
فى حالة الجمع .

وتقرأ أولا : إن حاصل الضرب المنطق للفئة ا × الفئة (ب حـ) ، يكون هوهو حاصل ضرب الفئة ب × الفئة (ا حـ) ، ويكون هوهو حاصل ضرب الفئة حـ × الفئة (ا ب) .

---

(١) أو « التعويض » : المنطق الصورى والرياضى ، الدكتور عبد الرحمن بدوى ، صفحة ٢٩٤ .

(٢) ويعرف هذا القانون فى الرياضيات باسم « قانون ترتيب الحدود » ، ويسميه الدكتور عبد الرحمن بدوى فى كتابه سالف الذكر ، صفحة ٢٩٤ باسم « مبدأ التجميع » .



كما نعبر ثانياً عن أن حاصل الجمع المنطقى للفئة ا والفئة (ب + ح) يكون هوهو حاصل جمع الفئة ب والفئة (ا + ح)، ويكون هوهو حاصل جمع الفئتين ح، (ا + ب).

٨ — قانونا الاستغراق Laws of Distribution :

ويمكن التعبير عنهما على النحو الآتى : —

أولا : ا × (ب + ح) = ا ب + ا ح

ثانيا : ا + (ب × ح) = (ا + ب) (ا + ح)

ويلاحظ أن القانون الأول الذى يجعل حاصل الضرب أشمل من حاصل الجمع، قانون عادى من قوانين الجبر، كما أنه يصلح للتطبيق بالنسبة للأعداد العادية(١) في حين أن القانون الثانى الذى يجعل حاصل الجمع أشمل من حاصل الضرب، لا يصدق فى حالة الرياضيات، وخاصة الحساب.

ولنأخذ لذلك المثال الآتى : لو كانت قيمة ا هى ٥، ب هى ٢، ح هى ٤ :

لكان القانون الأول : ٥ × (٢ + ٤) = ٥ × ٢ + ٥ × ٤

٥ × ٦ = ١٠ + ٢٠

∴ ٣٠ = ٣٠

ولكان القانون الثانى : ٥ + (٢ × ٤) = (٥ + ٢) × (٥ + ٤)

٥ + ٨ = ٧ × ٩

∴ ١٣ = ٦٣

---

(١) Cohen, M. & Nagel, E. : An Introduction to Logic, P. 124.

يتضح من هذا أن القانون الأول يصلح للتطبيق فى حالة الرياضيات ، كما فى حالة المنطق . فى حين أن القانون الثانى ، وإن كان قانونا منطقيا خاصا بحساب الفئات إلا أنه لا يصلح للتطبيق فى حالة الرياضيات .

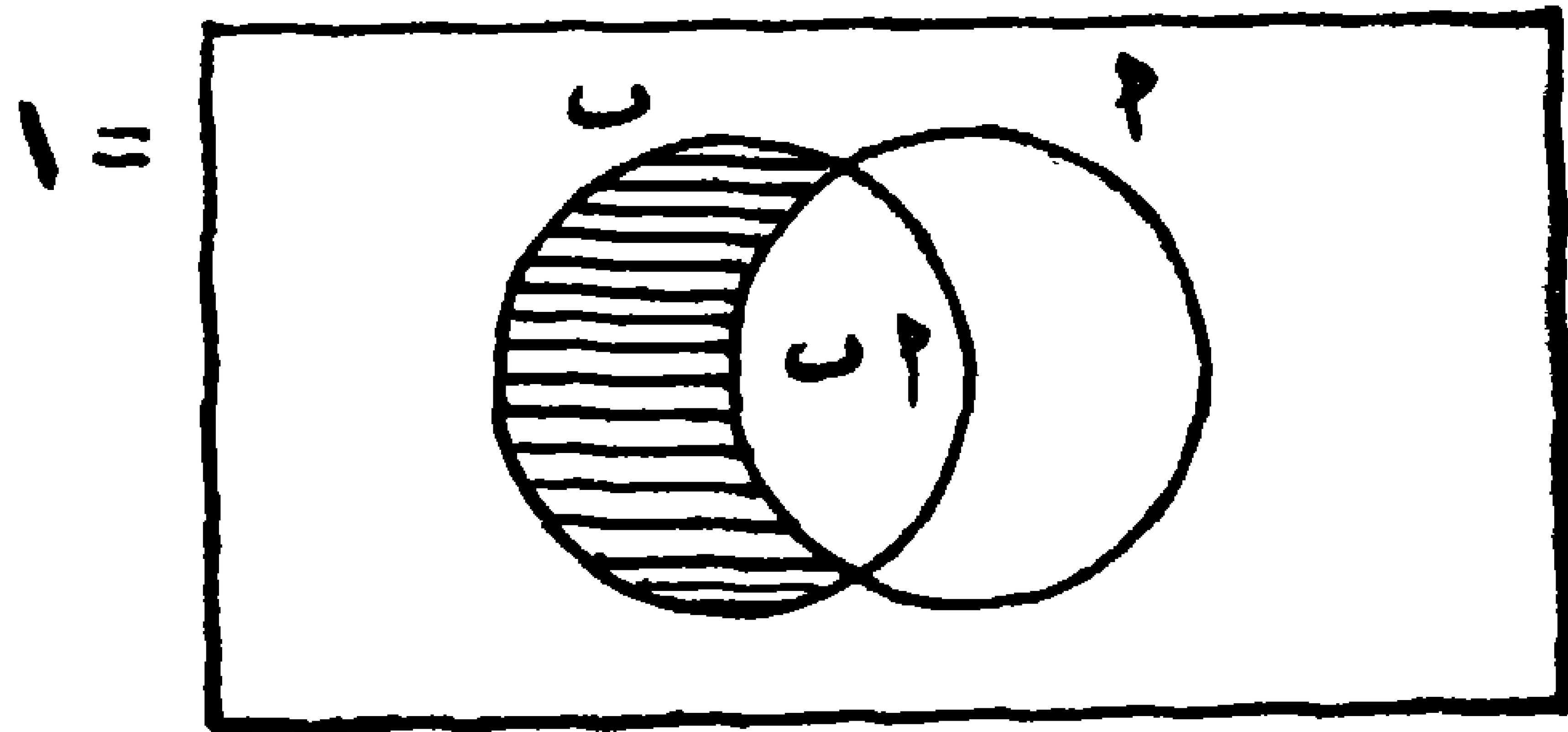
٩ — قانونا الاستنفاد Laws of Absorbtion :

ويمكن التعبير عنهما كما يلى : —

أولا : ا + ا ب = ا

ثانيا : ا (ا + ب) = ا .

ولتوضيح القانون الأول نفترض أن الرمز ا يشير إلى فئة الطلبة ، والرمز ب يشير إلى فئة المجتهدين ، ومن ثم تتكون الفئة ا ب هى فئة الطلبة المجتهدين ، وهى لا تمثل إلا جزءاً من الفئة ا أى فئة الطلبة . ولذا فالقول بالفئة التى تتكون إما من الطلبة أو من الطلبة المجتهدين لا يزيد عن قولنا بفئة الطلبة . ولعل هذا ما يتضح من الرسم التالى :



شكل ١٩

أما القانون الثانى فتتضح صحته بفك الأقواس الخاصة بالشطر الأيمن من المعادلة وذلك كما يلى :

∵ ا × (ا + ب) = (ا × ا) + (ا × ب)

∵ ا × ا = ا بناء على قانون الهوية

∴ ا × (ا + ب) = ا + ا ب

وبوضع : ا + ا ب مكان ا (ا + ب) فى القانون الثانى نحصل على :

ا + ا ب = ا وهو القانون الأول الذى أوضحنا صحته .

١٠ — قانونا التبسيط Laws of Simplification :

ويمكن التعبير عنهما على النحو الآتى :

أولا : ا ب ⊂ ا

ثانيا : ا ⊂ ا + ب

فلو قلنا — بالنسبة للقانون الأول — أن ا تشير إلى فئة الطلبة ، ب تشير إلى فئة المجتهدين ، كانت ا ب تشير إلى فئة الطلبة المجتهدين . واستطعنا أن نقرأ العبارة كما يلى :

« الطالب المجتهد طالب » . ولكان معنى هذا :

١ — إما أن فئة الطلبة المجتهدين جزء من فئة الطلبة ، فيكون بعض الطلبة مجتهدين وبعضهم الآخر غير مجتهد ومن ثم تكون :

ا = ا ب + ا بَ

ويلزم عن هذا التعبير كل من الصيغتين التاليتين :

ا ب ⊂ ا ،

ا بَ ⊂ ا .

٣) ب وإما أن تكون فئة الطلبة المجتهدين هي نفسها فئة الطلبة ، وبالتالى لا يكون هنالك طالب واحد غير مجتهد . وعلى ذلك تكون :

ا ب = ا

فإذا طبقنا على ذلك التعبير القائل بأن : ا = ا تكافىء القول ا ⊃ ا ،

لحصلنا على : ا ب ⊃ ا

أما فيما يتعلق بالقانون الثانى : ا ⊃ ا + ب فمن الواضح أنه صحيح ، طالما أن الفئة ا ، هى إحدى مكونات الفئة (ا + ب) ، وعلى ذلك تكون متضمنة فيها أو مندرجة تحتها . كأن أقول إن فئة الطلبة (ا) متضمنة فى الفئة المكونة من إما طلبة أو طالبات (ا + ب) أو هى تنتمى إليها .

بعض النتائج المترتبة على القانونين السابقين :

أولا : استكمالا للقانون الثانى ، يمكننا أن نستنتج النتيجة الطبيعية التالية :

ب ⊃ ا + ب

ويمكن البرهنة على صحة هذه الصيغة بنفس الطريقة التى استخدمناها للبرهنة على صحة الصيغة : ا ⊃ ا + ب .

ثانيا : أن : صفر ⊃ ا

وتقرأ : أن الفئة الفارغة أو الصفرية متضمنة فى أية فئة .

ثالثا : ا ⊃ ا

وتقرأ : أن أية فئة تمثل ا تكون متضمنة فى عالم المقال أو الواحد الصحيح . وللبرهنة على ذلك لن نحتاج إلى أكثر من أن نفترض :

(١) أن : ب = صفر في القانون الأول .

(٢) أن : ب = ١ في القانون الثاني .(١)

— ففي القانون الأول وهو (ا ب ⊐ ا) ، لو كانت ب = صفر لحصلنا على:

ا × صفر ⊐ ا

وبما أن ا × صفر = صفر

صفر ⊐ ا

— وفي القانون الثاني وهو (ا ⊐ ا + ب) ، لو كانت ب = ١ لحصلنا على:

ا ⊐ ا + ١

وبما أن ا + ١ = ١

∴ ا ⊐ ١

كما يمكن البرهنة على صحة هذه النتيجة الثانية ، وهي (ا ⊐ ١) ، طالما أن عالم المقال يكون دائماً مكوناً من حاصل جمع أية فئة مناسبة والفئة المكملة لها ، أي أن:

(١ = ا + اَ) .

∴ ا ⊐ ١ .

رابعاً : كما يمكننا أن نستنتج في هذه الحالة أيضاً أن :

اَ ⊐ ١

طالما كانت الصيغة (ا ⊐ ١) صحيحة .

---

(١) Cohen. M. & Magel, E. : An Introduetion to Logic, P. 124

١١ — قانون التركيب Law of Composition

ويمكن التعبير عنه كما يلى :

أولا : [(ا ⊃ ب) . (حـ ⊃ ى)] ⊃ (ا حـ ⊃ ب ى) .

ثانياً : [(ا ⊃ ب) . (حـ ⊃ ى)] ⊃ [(ا + حـ) ⊃ (ب + ى)] .(١)

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه . هذا ويلاحظ أننا قد استخدمنا هنا الرمز « ⊃ » أربع مرات فى كل واحد من القانونين السابقين ، ثلاث مرات منها للدلالة على التضمن بين الفئات مثـــل (ا ⊃ ب) ، (ا ⊃ حـ) فى كل من القانونين ، ومثل (ا حـ ⊃ ب ى) فى القانون الأول ، [(ا + حـ) ⊃ (ب + ى)] فى القانون الثانى . كما استخدمناه مرة أخرى فى كل من القانونين للدلالة على اللزوم بين القضايا ، بمعنى أن كل التعبير الذى يتلوه فى هذه الحالة يلزم عن كل التعبيـــر الذى يسبقه . وللتفرقة بين معنى الرمز « ⊃ » الدال على التضمن بين الفئات والرمز نفسه من حيث هو دال على اللزوم بين القضايا ، فإننـــا غالباً ما نضع كل التعبير السابق عليه بين قوسين مربعين [...] ، وكذا كل التعبير التالى له ، فى حالة اللزوم بين القضايا . وقد يمكن التميـيز بين المعنيين بعلامة أخرى مثل : « . ⊃ . » أو « : ⊃ : » التى تستخدم فى حالة اللزوم بين القضايا . ولذا يمكن كتابة القانونين السابقين على نحو آخر كما يلى :

أولا : (ا ⊃ ب) . (حـ ⊃ ى) : ⊃ : (ا حـ ⊃ ب ى)

أو : ا ⊃ ب . حـ ⊃ ى . ⊃ . ا حـ ⊃ ب ى

ثانياً : (ا ⊃ ب) . (حـ ⊃ ى) . ⊃ . (ا + حـ) ⊃ (ب + ى)

أو : ا ⊃ ب . حـ ⊃ ى : ⊃ : ا + حـ ⊃ ب + ى

ويلاحظ أننا نستخدم النقطة (.) فى القانونين السابقين للقول بالتعبيرين السابق عليها واللاحق لها معاً . وتعبر النقطة فى هذه الحالة عن إجراء الضرب المنطقى بين القضايا ، وتناظر فى هذا الصدد العلامة (×) التى تفيد إجراء الضرب المنطقى =

ويقـــرأ التعبير الأول كما يلي : لو كانت الفئة ا متضمنة في الفئة ب ، وكانت كذلك الفئة حـ متضمنة في الفئة ى ، لزم عن هذا كله أن تكون الفئة ا حـ متضمنة في الفئة ب ى .

ويقرأ التعبير الثاني كما يلي : لو كانت الفئة ا متضمنة في الفئة ب ، وكانت كذلك الفئة حـ متضمنة في الفئة ى ، للزم عن ذلك كله أن تكون الفئة (ا + حـ) متضمنة في الفئة (ب + ى) .

ولنأخذ مثلا يوضح القانون الأول ، فلو كانت ا تشير إلى فئة الرسامين ، ب إلى فئة الفنانين ، و حـ إلى فئة المجددين ، ى إلى فئة المجتهدين ، لـكان معنى القانون الأول هو :

إن القول بأن الرسام فنان ، وبأن المجدد مجتهد ، يستلزم القـــول بأن الرسام المجدد هو فنان مجتهد .

١٢ — قانون القياس Law of Syllogism

ويمكن التعبير عنه على النحو الآتي :—

[(ا ⊃ ب) . (ب ⊃ حـ)] ⊃ (ا ⊃ حـ) .

ويقرأ : إن القول بأن الفئة ا متضمنة في الفئة ب ، وأن الفئـة ب متضمنة في الفئة حـ ، يستلزم القول بأن الفئة ا متضمنة في الفئة حـ . فلو كانت ا تشير إلى فئـة الإنسان ، ب إلى فئة الحيوان ، حـ إلى فئة الـكائنات الحية ، لـكانت العبارة التالية صحيحه : لو كان الإنسان حيوانا ، وكان الحيوان كائنا حيا ، فإنه يلزم عن ذلك أن يكون الإنسان كائنا حيا .

= بين الفئات . وسنعود إلى توضيح استخدام هذه العلامات والرموز فيما بعد أثناء عرضنا للحساب التحليلي للقضايا .

١٣ — قانونا دى مورجن(١)

هذان القانونان يسمحان لنا دائماً بالتعبير عن حاصل ضرب الفئات بواسطة إجراء الجمع ، والعكس صحيح ، أى التعبير عن حاصل جمع الفئات بواسطة إجراء الضرب . ويمكن التعبير عن القانونين كما يلى :

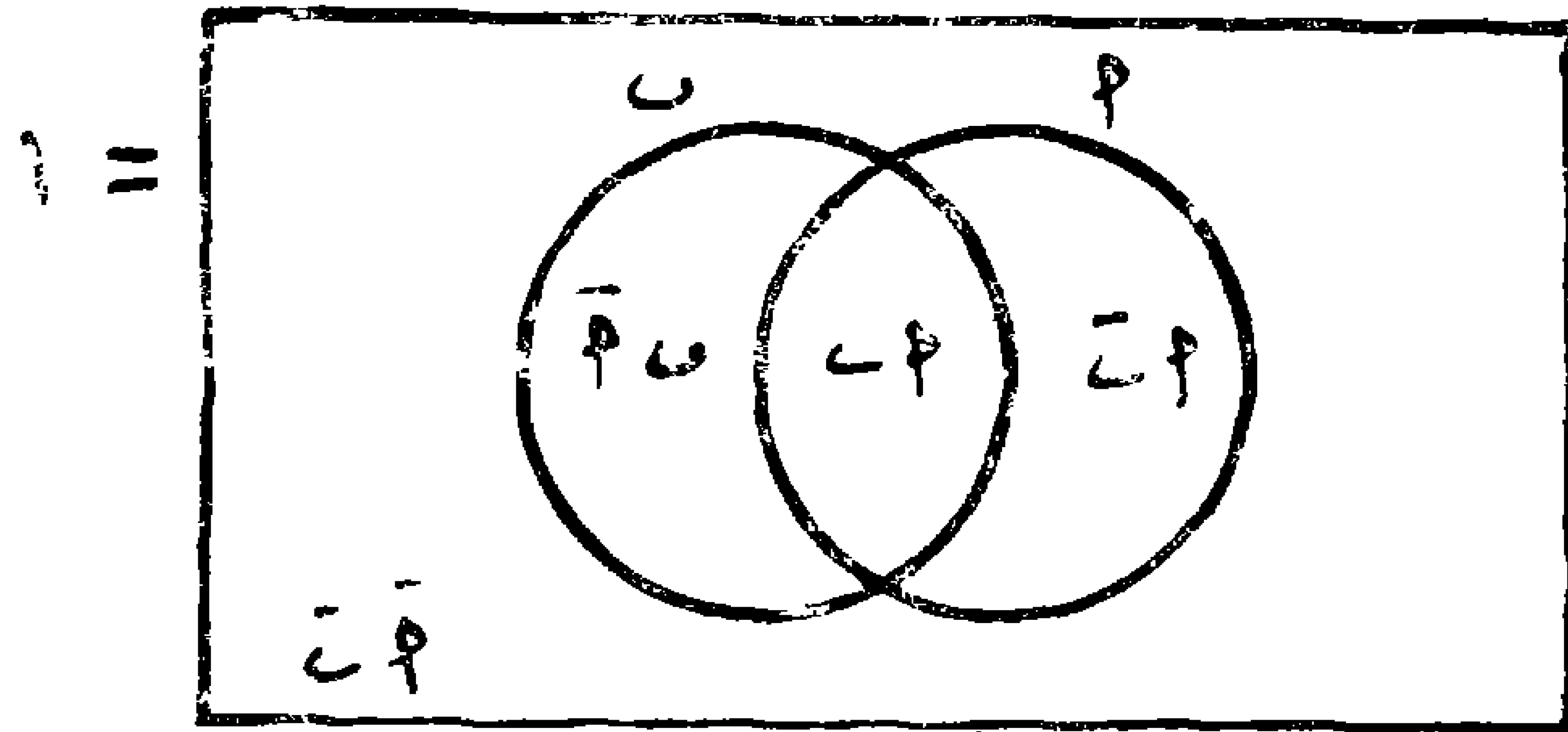
أولا : $\overline{(ا \times ب)} = ا' + ب'$

ثانياً : $\overline{(ا + ب)} = ا' \times ب'$

أى أن الفئة المكملة لحاصل ضرب فئتين ، تكون هى هى الفئة الناتجة عن حاصل جمع الفئتين المكملتين للفئتين الأصليتين .

كما أن الفئة المكملة لحاصل جمع فئتين ، تكون هى هى الفئة الناتجة عن حاصل ضرب الفئتين المكملتين للفئتين الأصليتين.

والواقع أن قانونى دى مورجن يتعلقان بشكل فن وما يترتب عليه من نتائج ، ويمكن توضيح ذلك لو لحصنا أهم نتائج شكل فن ، وذلك كما يلى :—



شكل ٢٠

---

(١) نسبة إلى عالم الرياضة والمنطق الأنجليزى أوجستس دى مورجن Augustus De Morgan (١٨٠٦ — ١٨٧١) الذى شغل منصب أستاذ الرياضيات بجامعة لندن فيما بين عامى ١٨٢٨، ١٨٦٦ ، واشتهر فى المنطق الرياضى =

أولا : ١ = ا بَ + اَ ب + ا ب + اَ بَ .

ويمكن البرهنة على صحة هذه الصيغة على النحو الآتى :

∵ ١ = ا + اَ (قانون الوسط المرفوع)

∵ ١ = ب + بَ » » »

∵ ١ × ١ = ١ (قانون تحصيل الحاصل)

∴ ١ = (ا + اَ) × (ب + بَ)

= ا ب + ا بَ + ب اَ + اَ بَ

= ا بَ + اَ ب + ب ا + اَ بَ (قانون ترتيب الحدود)

ثانياً : ا + ب = ا بَ + ب اَ + ا ب

يمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلى :

ا = ا بَ + ا ب

ب = ب اَ + ا ب

∴ ا + ب = ا بَ + ا ب + ب اَ + ا ب

= ا بَ + ب اَ + ا ب + ا ب

وبما أن ا ب + ا ب = ا ب (بناء على قانون الهوية)

∴ ا + ب = ا بَ + ب اَ + ا ب .

ثالثاً : ١ = ا + ب + اَ بَ

ويمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلى :

∵ ١ = ا بَ + ب اَ + ا ب + اَ بَ (فى أولا) (١)

∵ ا + ب = ا بَ + ب اَ + ا ب (فى ثانياً) (٢)

= بهذين القانونين المتعلقين بجبر المنطق . وأهم مؤلفاته كتاب « المنطق الصورى أو الحساب التحليلى للاستدلال » عام ١٨٧٤ .

∴ باستخدام قاعدة الاستبدال - (التى تسمح لنا بأن نضع بدلا من أى متغير من متغيرات الفئة ، متغيراً آخر يشير إلى فئة ترتبط بعلاقة الهوية مع الفئة الأولى ، وبدون أن يترتب على ذلك تغيير صدق أو كذب أية قضية ترد فيها هذه المتغيرات) - يمكن أن نضع (ا + ب) فى العبارة رقم (١) بدلا مما يساويها ، أى (ا بَ + ب اَ + ا ب) ، فنحصل على : ١ = ا + ب + اَ بَ .

رابعاً : $\overline{(ا + ب)}$ = اَ بَ

وللبرهنة على ذلك نقول :

- ∵ ١ = ا + اَ

∴ كل فئة ونفيها تكملان إحداهما الأخرى ، وتؤلفان معاً عالم المقال .

وبالعكس فالواحد الصحيح يتكون من أية فئة ، ونفيها ، أو الفئة المكملة لها .

- بتطبيق ذلك على النتيجة الثالثة من نتائج شكل فن وهى : ١ = ا + ب + اَ بَ ينتج أن كلا من الفئتين المجموعتين ، تكمل إحداهما الأخرى ، أى تنفى إحداهما الأخري وعلى ذلك ينتج أن :

١ - $\overline{(ا + ب)}$ = اَ بَ وهو المطلوب

ويلاحظ أن النتيجة التى وصلنا إليها الآن هى القانون الثانى من قانونى دى مورجن .

٢ - وأن : ا + ب = $\overline{(اَ بَ)}$.

هذا وغالباً ما يرد قانونا دى مورجن للفئات فى كثير من الكتب المنطقية باسم مبرهنة دى مورجن De Morgan's Theorem ، أو نظرية دى مورجن

للبرهنة . وتتكون البرهنة فى هذه الحالة من شقين :

١ — الشق الأول ويعبر عنه بالقول : إن سالب حاصل ضرب أى فئتين يساوى حاصل جمع سالب الفئتين .

٢ — الشق الثانى ويعبر عنه بالقول : إن سالب حاصل جمع أى فئتين يساوى حاصل ضرب سالب الفئتين .

ويمكن التدليل على صحة هذه البرهنة بشقيها على النحو الآتى :—

البرهان على الشق الأول ، أى على صحة : $\overline{(ا ب)}$ = اَ + بَ

— ∵ ١ = ا بَ + ب اَ + ا ب + اَ بَ

(النتيجة الأولى لشكل فن)

∴ ١ = ا بَ + ب اَ + اَ بَ + ا ب

(بتطبيق مبدأ ترتيب الحدود)

∴ (ا بَ + ب اَ + اَ بَ) تنفى ا ب طالما أنهما تستنفذان عالم المقال لأن مجموعهما يساوى الواحد الصحيح ، وطالما أنهما متخارجتان بمعنى أن حاصل ضربهما = صفر وبالتالى فإن أياً منهما تكون نفياً للأخرى .

— ولكن ا بَ + ب اَ + اَ بَ = ا بَ + ب اَ + اَ بَ + اَ بَ

(بتطبيق قانون تحصيل الحاصل)

= (ا بَ + اَ بَ) + (اَ ب + اَ بَ)

= بَ (ا + اَ) + اَ (ب + بَ)

(بتطبيق قانون الاستغراق)

وبما أن (ا + اَ) = ١ ، وبما أن (ب + بَ) = ١

(قانون الوسط المرفوع)

∴ ابَ + باَ + اَبَ = بَ × ١ + اَ × ١

= بَ + اَ

= اَ + بَ

∴ فإن (اَ + بَ) تنفى (ا ب)، كما أن (ا ب) تنفى (اَ + بَ).

∴ $\overline{(\text{ا ب})}$ = اَ + بَ وهو المطلوب (١)

---

(١) Cohen, M. & Nagel. E. : An Introduction to Logic, P. 125.

هذا ويمكن البرهنة بطريقة أخرى على هذه النتيجة ، وذلك كما يلى :—

∵ اَ = باَ + اَبَ شكل فن

، ∵ بَ = ابَ + اَبَ « «

∴ اَ + بَ = باَ + اَبَ + ابَ + اَبَ

= ابَ + باَ + (اَبَ + اَبَ)

وبما أن اَبَ + اَبَ = اَبَ

∴ اَ + بَ = ابَ + باَ + اَبَ

وبما أن : ١ = ابَ + باَ + اَبَ + اب

(النتيجة الأولى من نتائج شكل فن)

∴ ١ = اَ + بَ + اب (بتطبيق قانون الاستبدال)

∴ اَ + بَ تنفى اب ، وبالعكس . أى أن كلا من الفئتين تنفى الفئة الأخرى .

∴ $\overline{(\text{ا ب})}$ = اَ + بَ وهو المطلوب.

البرهان على الشق الثاني ، أى على صحة : $\overline{(ا + ب)}$ = اَ بَ

— ∵ ١ = ا بَ + ب اَ + ا ب + اَ بَ

(النتيجة الأولى من نتائج شكل فن)

∴ كل من الفئتين (ا بَ + ب اَ + ا ب) ، (اَ بَ)

تنفى إحداهما الأخرى (بناء على قانون الوسط المرفوع) .

— لكن ا بَ + ب اَ + ا ب = ا بَ + ب اَ + ا ب + ا ب

(بتطبيق قانون تحصيل الحاصل)

= (ا بَ + ا ب) + (ب اَ + ا ب)

= ا (بَ + ب) + ب (اَ + ا)

(بتطبيق قانون الاستغراق)

وبما أن (بَ + ب) = ١ ، وبما أن (اَ + ا) = ١

(قانون الوسط المرفوع)

∴ ا بَ + ب اَ + ا ب = ا × ١ + ب × ١

= ا + ب

∴ فإن (ا + ب) تنفى (اَ بَ) ، كما أن (اَ بَ) تنفى (ا + ب)

∴ $\overline{(ا + ب)}$ = اَ بَ وهو المطلوب .[1]

---

(١) Cohen, M. & Nagel, E. : An Introduction to Logic, P. 125

كما يمكن البرهنة على هذه النتيجة بطريقة أخرى ، من حيث هى النتيجة الرابعة من نتائج شكل فن ، وذلك ما أوردناه بالتفصيل من قبل ، ويتلخص فى الآتى :

∵ ١ = ا بَ + ب اَ + ا ب + اَ بَ

(النتيجة الأولى من شكل فن)

، ∵ ا + ب = ا بَ + ب اَ + ا ب (» الثانية » » »)

هذا ويلاحظ أننا نستطيع تعميم هذه النتائج بالنسبة لأى عدد محدود أو متناه من الفئات .

ويمكننا أن نعبر عن ذلك كما يلى :—

(١) $\overline{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ح} + \text{ء} + \dots)} = \text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{ح}'\,\text{ء}' \dots$

(٢) $\overline{(\text{ا ب ح ء} \dots)} = \text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}' + \text{ء}' + \dots$

بعض أنواع قضايا الفئات :

يمكن تصنيف قضايا الفئات من أكثر من زاوية مثل :—

أولا : من حيث الصدق Truth أو الكذب ، والصحة Validity أو عدم الصحة . وأننا لنفرق بين القضية الصادقة والقضية الصحيحة . حقاً أن كلمة « صحة » Validity عادة ما تستخدم لوصف الاستدلال أو البرهان ، فنقول « إستدلال صحيح» أو «برهان صحيح» . كما أن الصدق والكذب من الصفات التى توصف بها القضية ، لكننا نريد فى الواقع أن نفرق بين نوعين من القضايا :

١ — قضايا مثل : $(\text{١} = \text{ا} + \text{ا}')$.

٢ — قضايا مثل : $(\text{١} = \text{ا})$.

فنلاحظ أن القضايا التى تكون من النوع الأول ، لا يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على نفس النحو الذى نعبر به عن $(\text{١} = \text{ا})$ أو $(\text{١} \neq \text{ا})$. إذ أننا

$= \therefore \text{١} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ا}'\text{ب}'$ (النتيجة الثالثة من شكل فن)

∴ فكل من الفئتين $(\text{ا} + \text{ب})$ ، $(\text{ا}'\text{ب}')$ تنفى إحداهما الأخرى .

∴ $\overline{(\text{ا} + \text{ب})} = \text{ا}'\text{ب}'$ وهو المطلوب .

نستخدم فى الأشكال الخاصة بهاتين القضيتين الأخيرتين إما طريقة تظليل الفئـــة المحذوفة أو الفارغة ، أو طريقة وضع العلامة « √ » بالنسبة للفئة ذات الأعضاء . لـكن لا هذا الإجراء ولا ذاك يصلح للتعبير عما تثبته القضية (١ = ا + اَ) ، وذلك لأن هذا النوع من القضايا لا يمكن تكذيبه مهما كانت حالة العضوية الفعلية فى الفئة ا أو الفئة اَ . ولتوضيح ذلك نفرض أننا رسمنا مربعاً لعالم المقال ثم رسمنا فيه دائرة تمثل فئة فرعية من الفئات المندرجة تحت عالم المقال ، نلاحظ فى هـذه الحالة أننا لا نستطيع إلا الاعتراف بأن ما هو داخل الدائرة وما هو خارجها — أى الفئة والفئة المـكملة لها ، يستنفذان معاً عـــالم المقال ، أى أنهما معاً تساويان الواحد الصحيح .

∴ فالقضية (١ = ا + اَ) صادقة بالضرورة ، أو هى مما لا يمكن تكذيبه ولذا تسمى القضايا الشبيهة بهذه القضية ، بالقضايا الصحيحة **Valid** أو القضايا المعبرة عن تحصيل الحاصل Tautological (١) . بمعنى أنه مهما كانت القيم التى توضع بدلا من المتغيرات ، فإن القضية تكون صادقة دائماً . وهكذا فالصحة نوع خاص من الصدق ولا ينتمى إلا إلى القضايا التى يكون الصدق فيها مما يمكن تأكيده بمجرد معرفة ما تعنيه القضية . أما القضايا الشبيهة بالقضية (١ = ا) ، فهى ليست صادقة صدقاً ضرورياً ، بل هو صدق ممكن فقط . أى أن صدق مثل هذه القضية لا يمكن تحديده من مجرد معرفة معنى القضية ، بل يجب أن يتحدد بطريقة أخرى ، مثل مطابقتها للواقع لـكى نتبين أن الفئة ا هى الفئة الشاملة فعلا أم لا ، وهو أمر قد ينتهى بنا إلى إمكان صدق القضية أو كذبها .

نلخص ما سبق فنقول أن القضية الصحيحة ، هى القضية الصادقة بالضرورة ،

---

(١) Schipper, E. & Schuh, E.: A First Course in Modern Logic, P 276.

ويكون صدقها لا زماً عن صورتها وطريقة تركيبها فقط ، بغض النظر عن مطابقتها للواقع أو عن عضويتها الفعلية . أما القضية الصادقة True ، فهى تلك التى لا يرجع الصدق فيها إلى صورتها أو معناها فقط ، بل إلى تحقيقها ، ولذا فالصدق فيها صدق ممكن فقط وليس صدقاً ضرورياً .

ومن أمثلة القضايا الصحيحة (بهذا المعنى) : (١)

١ — ١ = ا + اَ أو ١ = ب + بَ ...

٢ — ا = ا × ١

٣ — صفر = ١َ

٤ — صفر = ا × اَ

٥ — ا = ا

ومن أمثلة القضايا الصادقة (بالمعنى سالف الذكر ، أى الممكنة الصدق والكذب) :

١ — ١ = ا أو ١ = ب ..

٢ — ١ ≠ ا

٣ — ا = ب

٤ — س (≡ ا

٥ — ا ≠ صفر

ثانياً : من حيث البساطة والتركيب : وتنقسم قضايا الفئات إلى نوعين أساسيين.

١ — قضايا بسيطة Simple ، وهى تلك التى لا تحتوى أية قضية منها إلا على متغير مفرد لفئة ما مثل :

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٢٧٧

١ — ا = صفر

٢ — ا ≠ صفر

٣ — س ⊂ ا

٤ — س ⊂ اَ .. وغير ذلك .

٢ — قضايا مركبة Compound ، وهى تلك التى تحتوى على حاصل ضرب أو جمع عدة فئات مثل :—

١ — ا ب = صفر

٢ — ا ب حـ ≠ صفر

٣ — س ⊂ ا ب

٤ — س ⊂ ا + ب .. وغير ذلك

هذا ويمكن استخدام قضايا الفئات ، من حيث هى وحدات بسيطة يمكن تطبيق عدد من الإجراءات المنطقية إزاءها مثل العطف ، فيمكن على سبيل المثال عطف قضيتين أو أكثر من قضايا الفئات ، بسيطتين أو مركبتين ، أو إحداهما بسيطة والأخرى مركبة ، فنحصل بذلك على قضية عطفية مثل :

١ — (ا ب = صفر . ا ≠ صفر) ، وتقرأ : أن ا ب فئة فارغة ، وأن ا فئة ذات ما صدقات وليست فارغة . وهذا يعنى أن كلا القضيتين المعطوفتين (ا ب = صفر) ، (ا ≠ صفر) صادقتان معاً .

٢ — س ⊂ ا . ب = صفر .

٣ — (ا بَ = صفر . ا = حـ . حـ ≠ صفر) ... وغير ذلك .

هذا ويجب ألا نخلط بين هذا النوع الأخير من القضايا الخاص بالفئات — أى

القضايا العطفية — وبين الفئات العطفية Conjunctive Classes فالفئة العطفية هى حاصل عطف (أو ضرب) فئتين أو أكثر ، مثل « ا ب » أو « ا ب ح » فى حين أن علينا تفسير القضية العطفية على أنها عطف قضيتين (من قضايا الفئات فى الحالة التى نتكلم عنها) أو أكثر . وسنعود إلى مثل هذا الإجراء وغيره بين القضايا بالتفصيل ، فى الجزء الخاص بالحساب التحليلى للقضايا .

ثالثا : قضايا الفئات من حيث الكم :

وتقسم إلى : قضايا كلية ، وقضايا جزئية ، وقضايا مفردة .

ا — القضايا الكلية : Universal والقضية الكلية — فى منطق الفئات هى تلك التى تثبت أن فئة ما ، بسيطة أو مركبة ، تساوى الفئة الصفرية ، أو بمعنى آخر أنها فئة فارغة . فالقضية البسيطة التالية مثلا : (ا = صفر) ، والقضية المركبة التاليـة (ا ب = صفر) ، كلاهما يثبت شيئا عن الفئة بأكملها سواء كانت ا أو ا ب ، وأنها مساوية للصفر . ومن ثم فكل قضية منهما هى قضية كلية .

ب — القضايا الجزئية : Particular ، وهى على عكس النوع السابق ، لا تثبت إلا أن فئة ما هى فئة ذات أعضاء ، ويكون الإثبات فى هذه الحالة منصرفا إلى بعض هذه الأعضاء دون تحديد لها . ومن ثم فلا تكون هذه الفئة متطابقة ذاتياً مع الفئة الفارغة أو فى هوية معها . وسواء كانت الفئة محتوية على عضو واحد فقط ، أو على كثير من الأعضاء ، فالقضية التى تثبت ذلك وتقرره تكون قضية جزئية ، طالما أنها لا تتكلم عن كل الأعضاء فى الفئة . ولناخذ مثلا لذلك القضيتين التاليتين :

١ — ا $\neq$ صفر

٢ — ا ب $\neq$ صفر

فنلاحظ أن كلا من الفئتين ا ، ا ب هى فئة ذات أعضاء طالما أنها لا تساوى الفئة الفارغة .

حـ — أما القضايا المفردة : Singular ، فتجمع بين خصائص النوعين السابقين من القضايا الكلية والجزئية . وهذا ما يتضح مثلا من القضية التالية :—

س ⊂ ا

التى تثبت وتقرر أن « س » كلها ، عضو فى الفئة ا ، وأن الفئة ا ، هى فى الوقت نفسه فئة ذات أعضاء . ولذا عادة ما يقال عن أمثال هذه القضية — أى القضية المفردة — أنها من نوع مختلف ، فهى ليست بالقضية الكلية ، كما أنها ليست بالقضية الجزئية ، بل هى هما معاً .

وسنتناول فيما يلى بشىء من التفصيل ما أوجزناه :

ا — القضايا الكلية :

يمكن تصنيفها إلى قضايا موجبة أو سالبة أو استبعادية ، وذلك كما يلى :—

١ — القضايا الكلية الموجبة Universal Affirmative Propositions

وصورتها العامة تقليدياً هى :

كل ا هى ب .

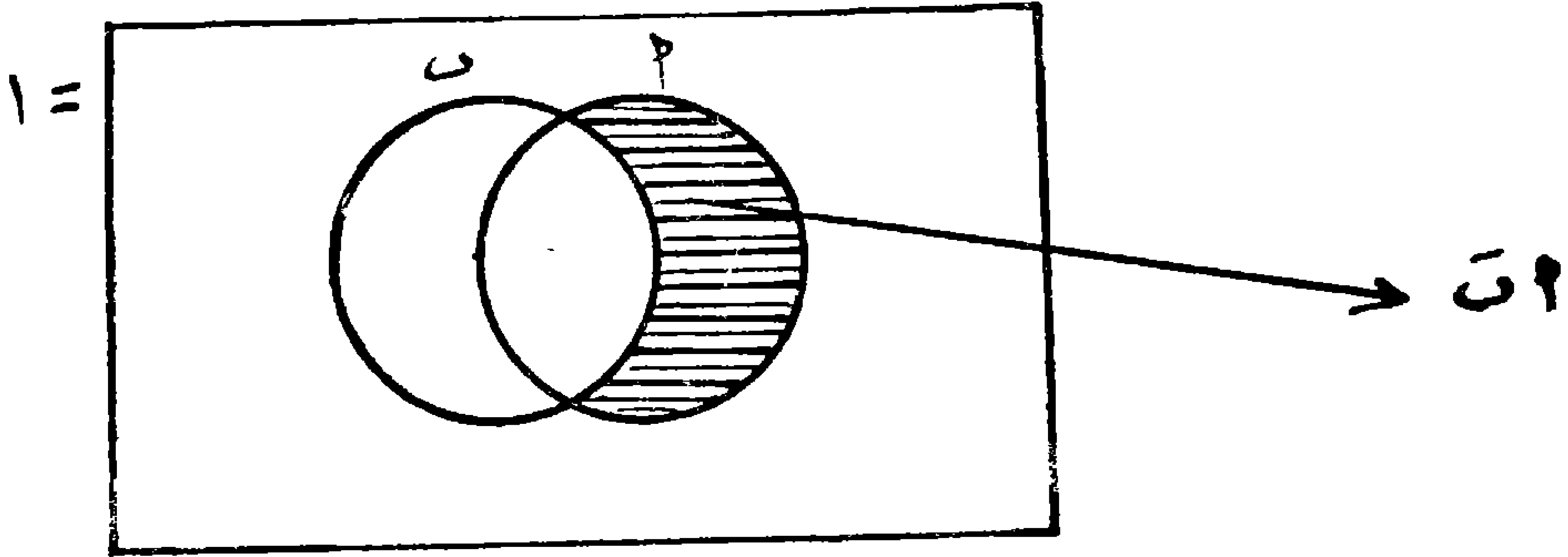
وتعنى هذه الصيغة أن الفئة ا متضمنة فى الفئة ب . وهذا يعنى بدوره عدم وجود أى عضو فى الفئة ا إلا ويكون كذلك متصفاً بكونه ب . وبعبارة أخرى تكون الفئة ا ، الخارجة عن ب فئة فارغة أو مساوية للصفر .

ولذا يمكن التعبير رمزيا عن القضايا التى تفيد التضمن بين الفئات

Class – inclusion Propositions – (فى هذه الحالة بين الفئتين ا ، ب) – على النحو الآتى :

ا بَ = صفر

ويمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتى :



شكل ٢١

٢ — القضايا الـكلية السالبة

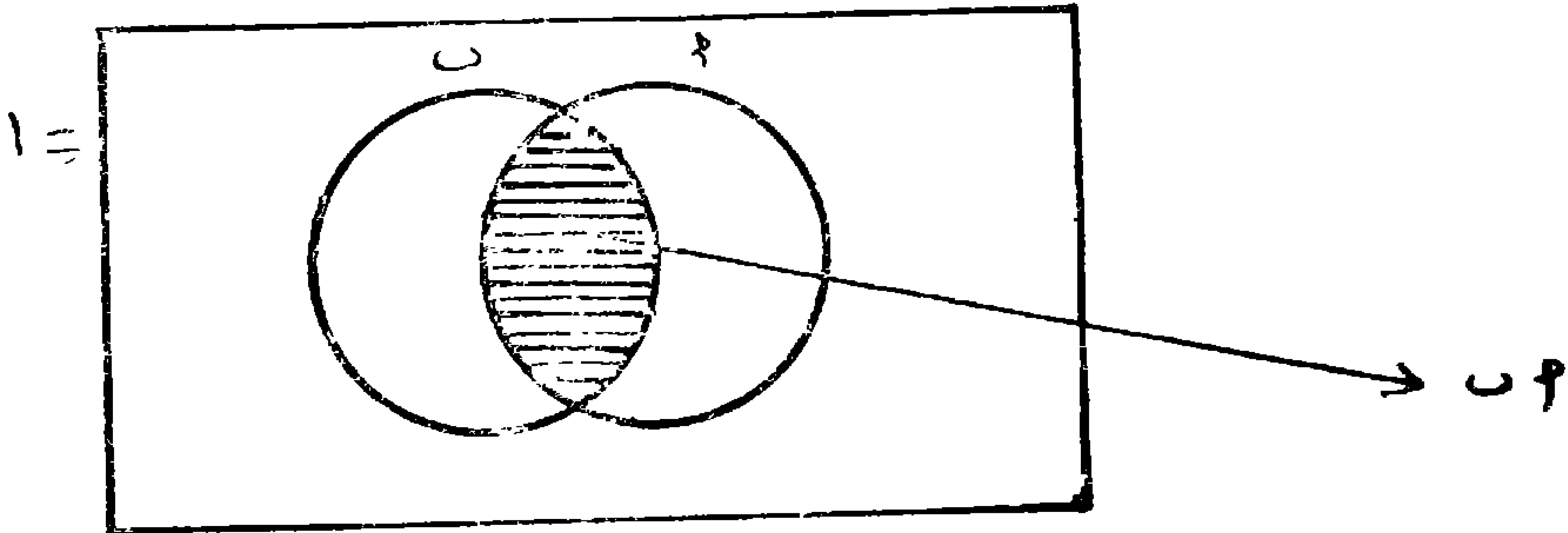
وتتمثل صورتها العامة — تقليديا — فى الصيغة التالية :

« لا ا هى ب »

وهو قول يثبت أن الفئة المشتركة بين الفئتين ا ، ب ، فئة فارغة . ولذا يمـكننا التعبير رمزيا عن هذه القضية كما يلى :

ا ب = صفر

كما يمكننا التعبير عنها بالرسم على النحو الآتى :



شكل ٢٢

٣ — القضايا الاستبعادية Exclusive Propositions

مثل : (فقط ا هى ب) (١)

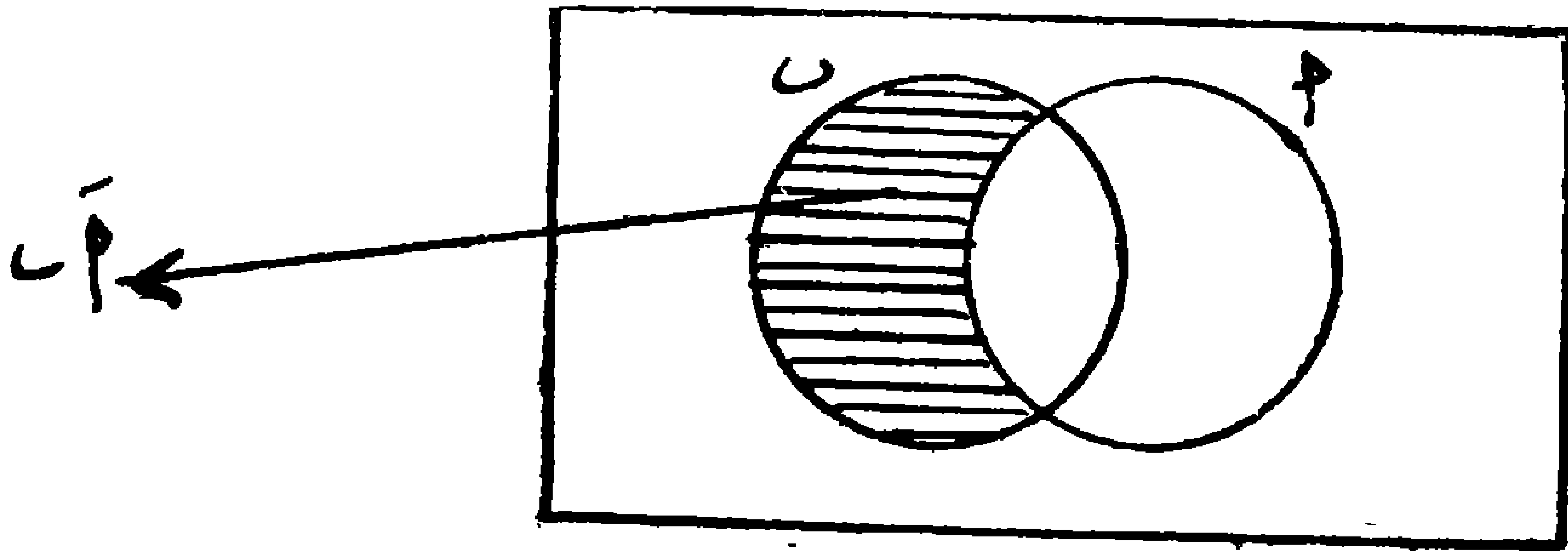
وتقرأ : (لا شىء من بين من ليس عضواً فى الفئة ا ، هو عضو فى الفئة ب) ، ويمكننا أن نعبر عنها رمزياً ، كما يلى :—

لا اَ هى ب

فإذا ما حاولنا أن نعبر عنها بالرسم ، سنجد أنه إذا كانت القضية (لا ا هى ب)، قد أمكن التعبير عنها رمزياً — كما سبق — بالصيغة (ا ب = صفر) فإن القضية (لا اَ هى ب) يجب أن يعبر عنها رمزياً بالصيغة :

اَ ب = صفر

كما يمكن التعبير عنها بالرسم كما يلى :—



شكل ٢٣

ويلاحظ من الشكل السابق أن القضية الاستبعادية قد أمكن التعبير عنها على أنها قضية كلية سالبة . هذا ويمكن التعبير عنها كذلك باعتبارها قضية كلية موجبة ذات

(١) Only A are B.

حدود معكوسة الترتيب ، أى : (كل ب هى ا) . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى :

∴ (فقط ا هى ب) تكافىء القول : (لا اَ هى ب)

و ∴ (لا اَ هى ب) » » : (اَ ب = صفر)

و ∴ (اَ ب = صفر) » » : (ب اَ = صفر)

(قانون تبادل الحدود)

و ∴ (ب اَ = صفر) » » : لا ب هى اَ

و ∴ لا ب هى اَ » » : كل ب هى ا (بنقض المحمول)

إذن (فقط ا هى ب) » » : كل ب هى ا (١)

وهكذا أمكن التعبير عن القضية الاستبعادية (فقط ا هى ب) باستخدام قضيتين كليتين إحداهما موجبة (كل ب هى ا) والأخرى سالبة (لا اَ هى ب) أو (لا ب هى اَ) . (٢)

---

(١) ويمكن البرهنة على ذلك بطريقة أخرى :

(١) (فقط ا هى ب) تكافىء (لا اَ هى ب)

(٢) (لا اَ هى ب) » (لا ب هى اَ) بالعكس المستوى .

(٣) (لا ب هى اَ) » كل ب هى ا بنقض المحمول. وهو المطلوب.

(٢) ومما هو جدير بالملاحظة فى هذه الحالة أن القضية (فقط ا هى ب) وإن كانت تكافىء (كل ب هى ا) إلا أنها تختلف عن القضية (كل ا هى ب) ، طالما أن الحكم فى القضية (فقط ا هى ب) لا ينصرف أساساً إلى ا بل إلى ما هو ليس ا ، أى اَ . وما دمنا نتكلم عن فئتين فقط هما ا ، ب . إذن فالحكم أصلا ينصرف إلى الفئة ب . ولذا كانت هذه القضية مكافئة للقضية (كل ب هى ا) ما القضية (كل ا هى ب) فالحكم فيها منصرف إلى ما هو ا .

ب — القضايا الجزئية

١ — الجزئية الموجبة

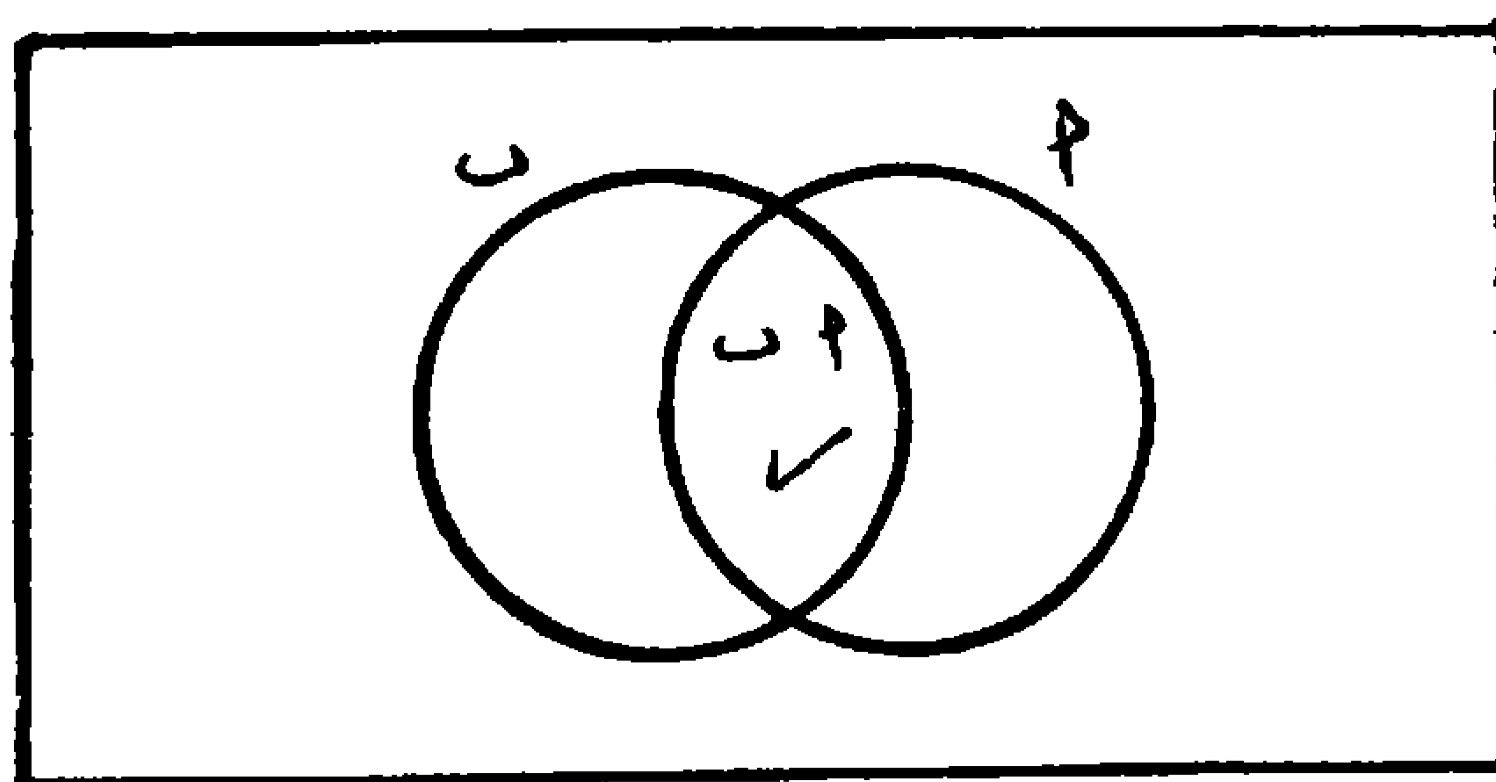
وتتمثل صورتها العامة فى الصيغة التالية :

« بعض ا هى ب »

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلى :

ا ب ≠ صفر . (١)

كما يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتى :



شكل ٤٢

ويدل هـــذا الرسم على أن الفئة إ ب ، فئة ذات أعضاء — ولذا وضعنا عليها علامة عضوية الفئة (√) — وليست فئة فارغة ، أى ليست مساوية للصفر .

ب — الجزئية السالبة :

وتتمثل صورتها العامة فى الصيغة التالية :

« ليس بعض إ هى ب »

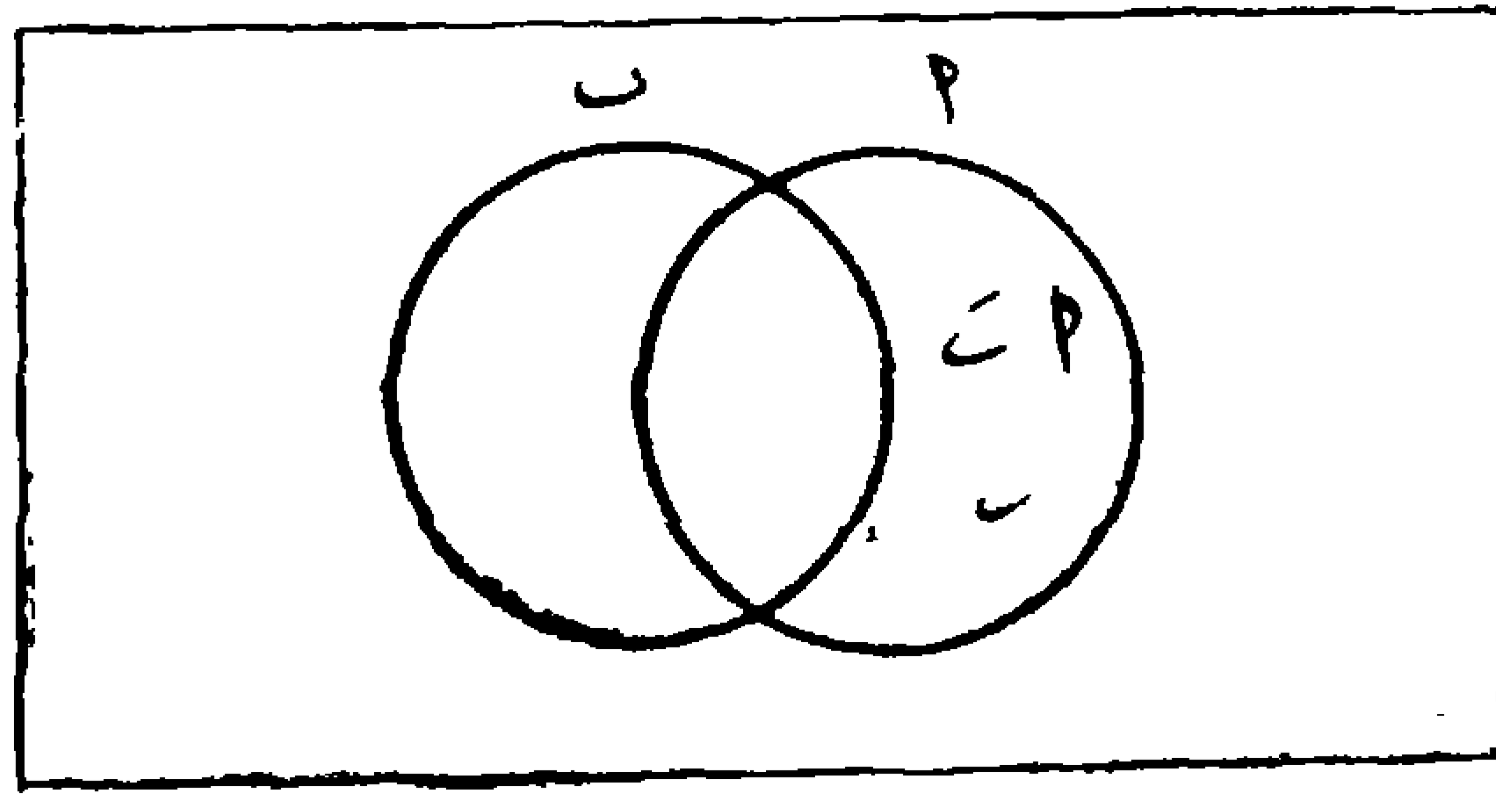
---

(١) وهذا مايتضح كذلك من أحكام التقابل بين القضايا فى المنطق التقليدى ، فإذا كنا نعبر عن القضية الكلية السالبة (لا إ هى ب) بالصيغة (إ ب = صفر) ، فإننا نعبر عن القضية المتناقضة معها ، أى القضية الجزئية الموجبة (بعض ا هي ب) بالصيغة (إ ب ≠ صفر) .

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلى :

ا بَ ≠ صفر (١)

كما يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتى :—



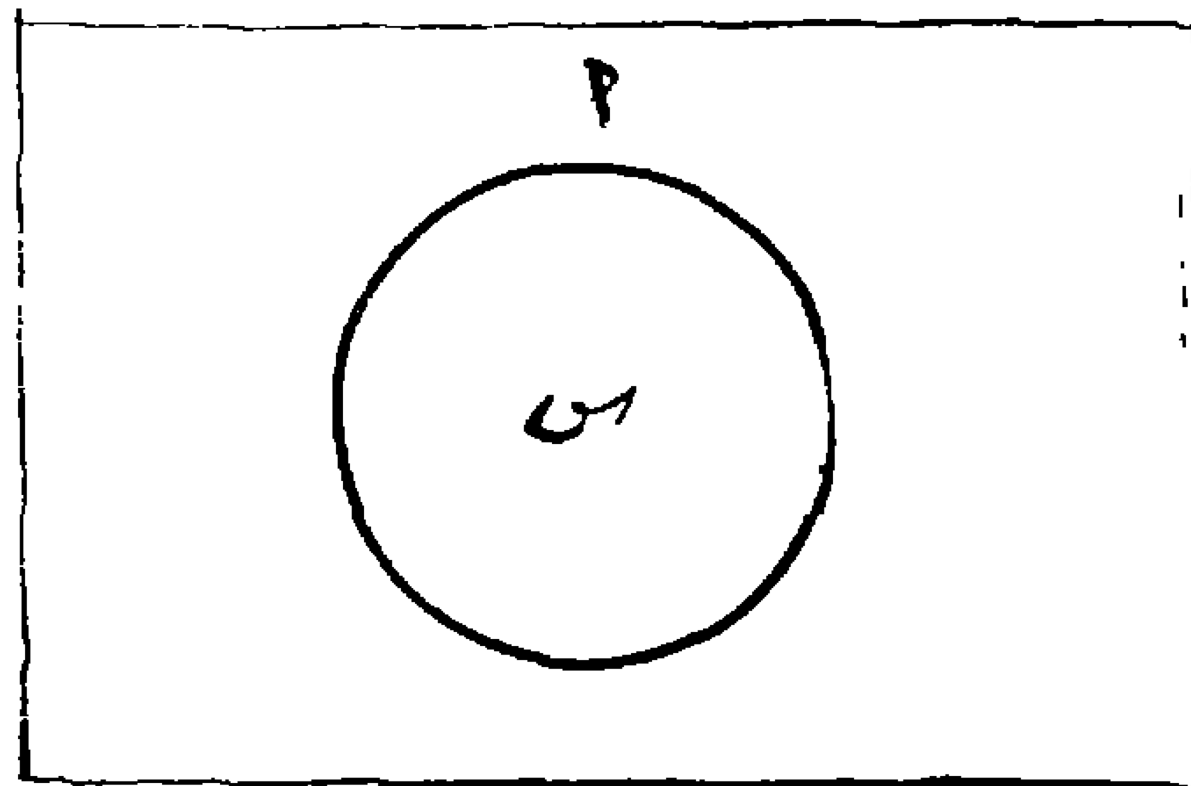
شكل ٢٥

حـ — القضايا المفردة

عادة ما يعبر عن عضوية الفرد فى فئة ، بالصيغة العامة التالية :

س ⊂ ا

ولقد أوضحنا من قبل أن الشكل الذى يستخدم لذلك ، هو الذى توضع فيه « س » وسط دائرة الفئة ا فى مربع عالم المقال :



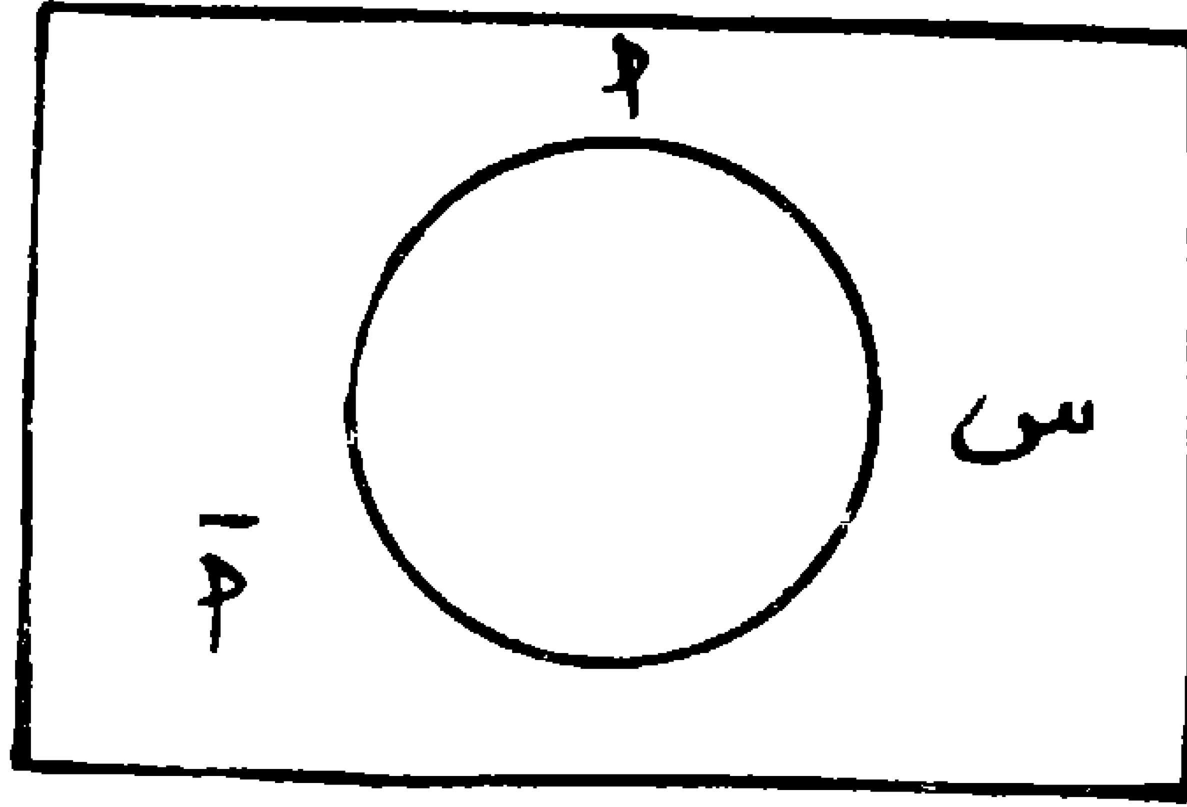
شكل ٢٦

(١) وهذا ما يتضح من أحكام التناقض فى المنطق التقليدى ، فإذا كنا نعبر عن =

وعادة ما نعبر عن نفى هـــذه القضية باستبعاد س عن عضوية الفئة ا ، وذلك بالصيغة التالية :

س ⊂ اَ

أو بوضع « س » خارج دائرة الفئة ا ، لو استخدمنا الرسم :



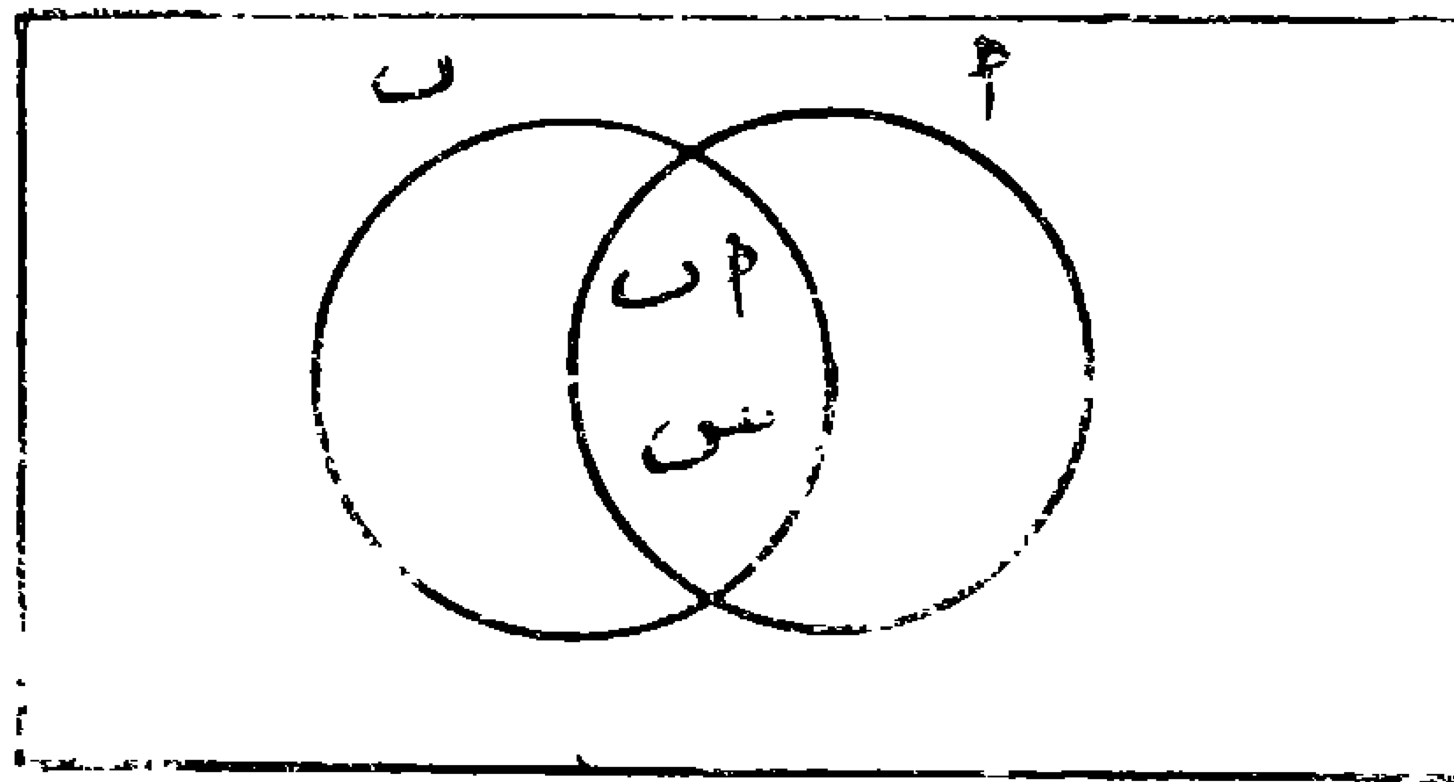
شكل ٢٧

أما إذا كنا نتكلم عن الفرد س من حيث هو عضو :

١ — فى الفئة المشتركة بين ا ، ب فإننا نرمز له بالصيغة التالية :

س ⊂ ا ب

ونعبر عنها بالرسم كما يلى :



شكل ٢٨

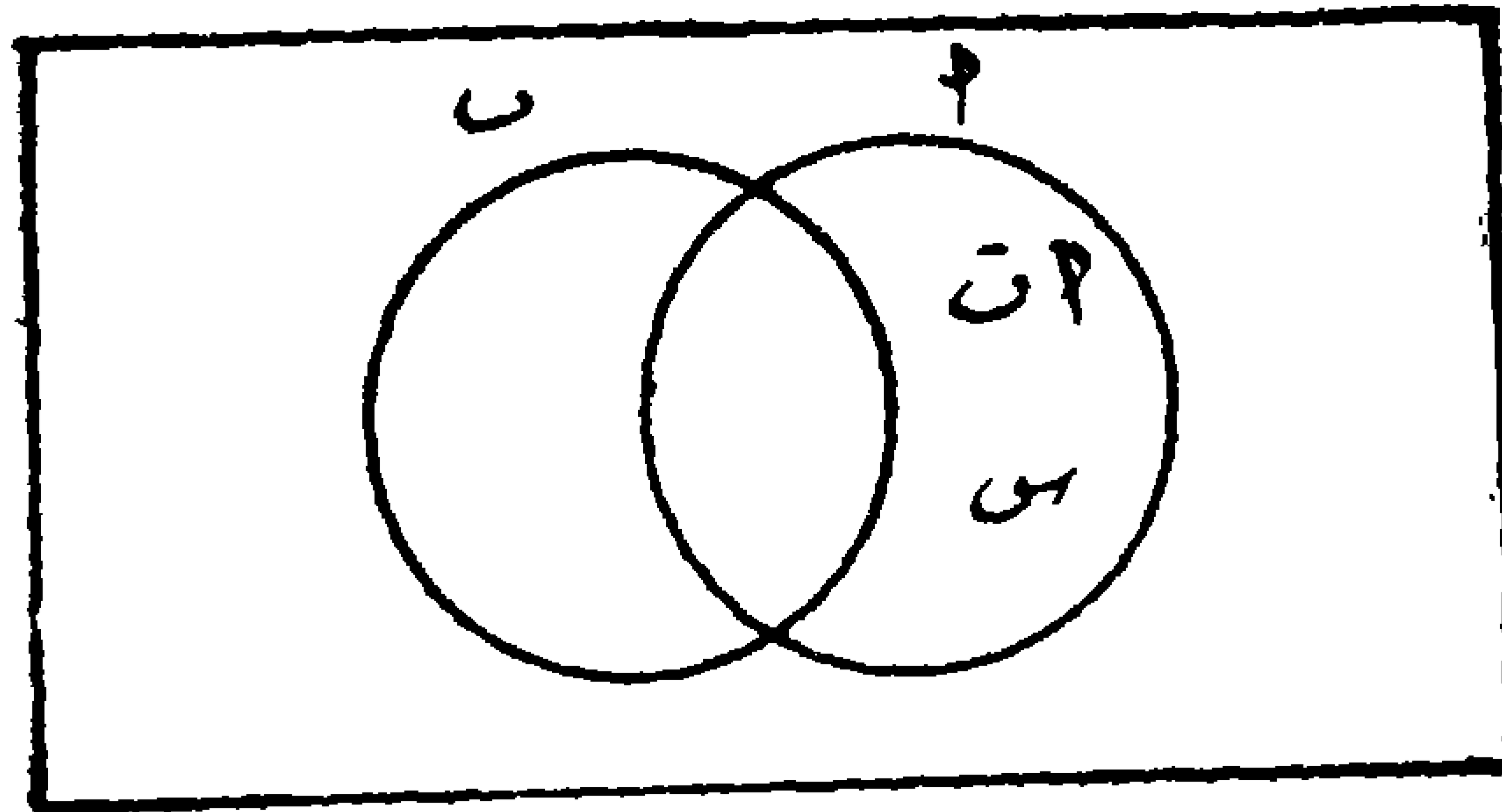
= القضية الـكلية الموجبة (كل ا هى ب) بالصيغة (ا بَ = صفر) ، فإننا نعبر عن القضية المتناقضة معها ، أى الجزئية السالبة (ليس بعض ا هى ب) بالصيغة (ا بَ ≠ صفر) .

ويكون نفى هذه القضية هو : س ⊆ $\overline{\text{(ا ب)}}$

٢ — أو الفئة التى تكون ا وليست ب ، ونرمز له بالصيغة التالية :

س ⊆ ا بَ

ونعبر عنه بالرسم كما يلى :



شكل ٢٩

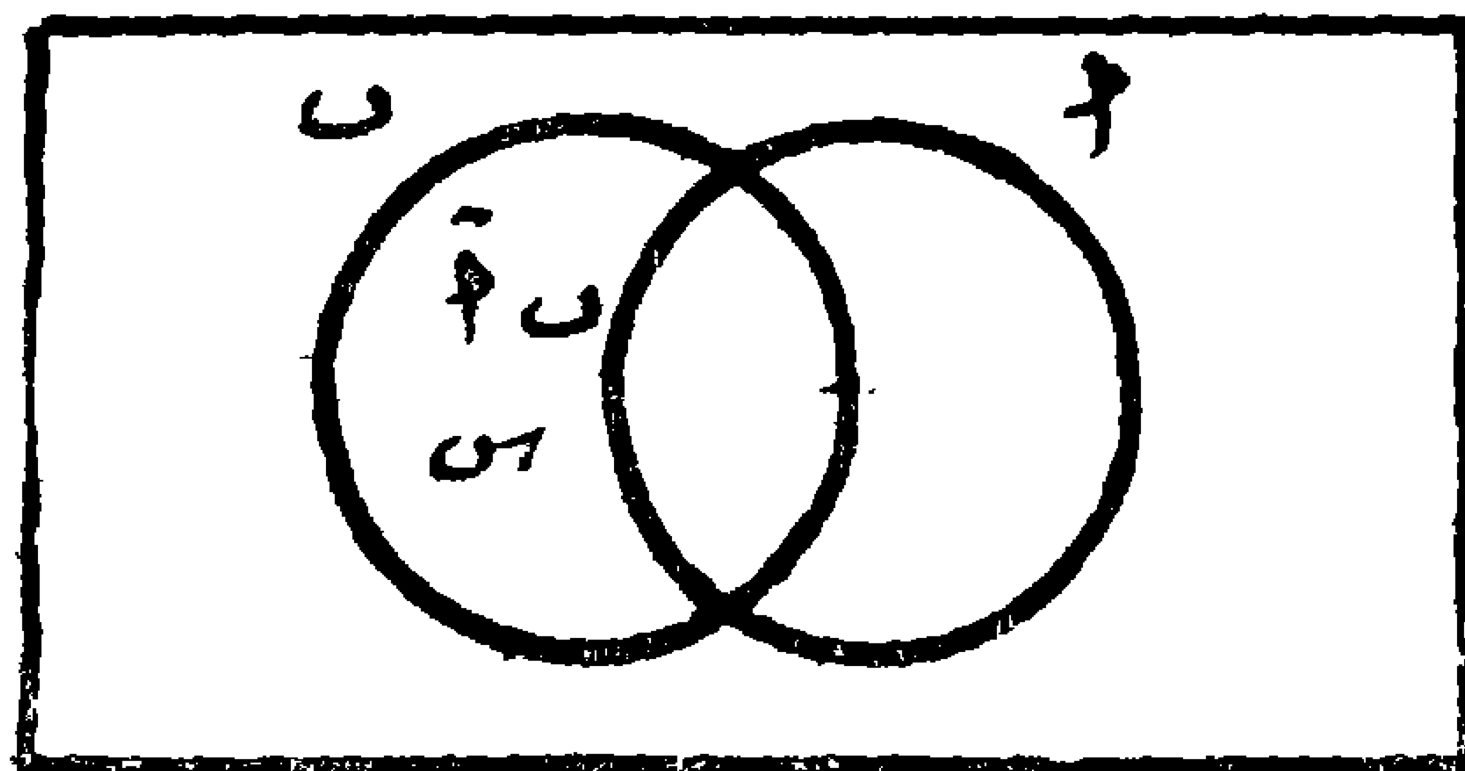
ويكون نفى هذه الصيغة هو :

س ⊆ $\overline{\text{(ا بَ)}}$

٣ — أو فى الفئة التى تكون ب وليست ا ، ونرمز له بالصيغة التالية :

س ⊆ ب اَ

ونعبر عنه بالرسم كما يلى :



شكل ٣٠

ويكون نفى هذه الصيغة هو :

$$\text{س} \supset \equiv \overline{(\text{ب آ})}$$

القضايا العطفية :

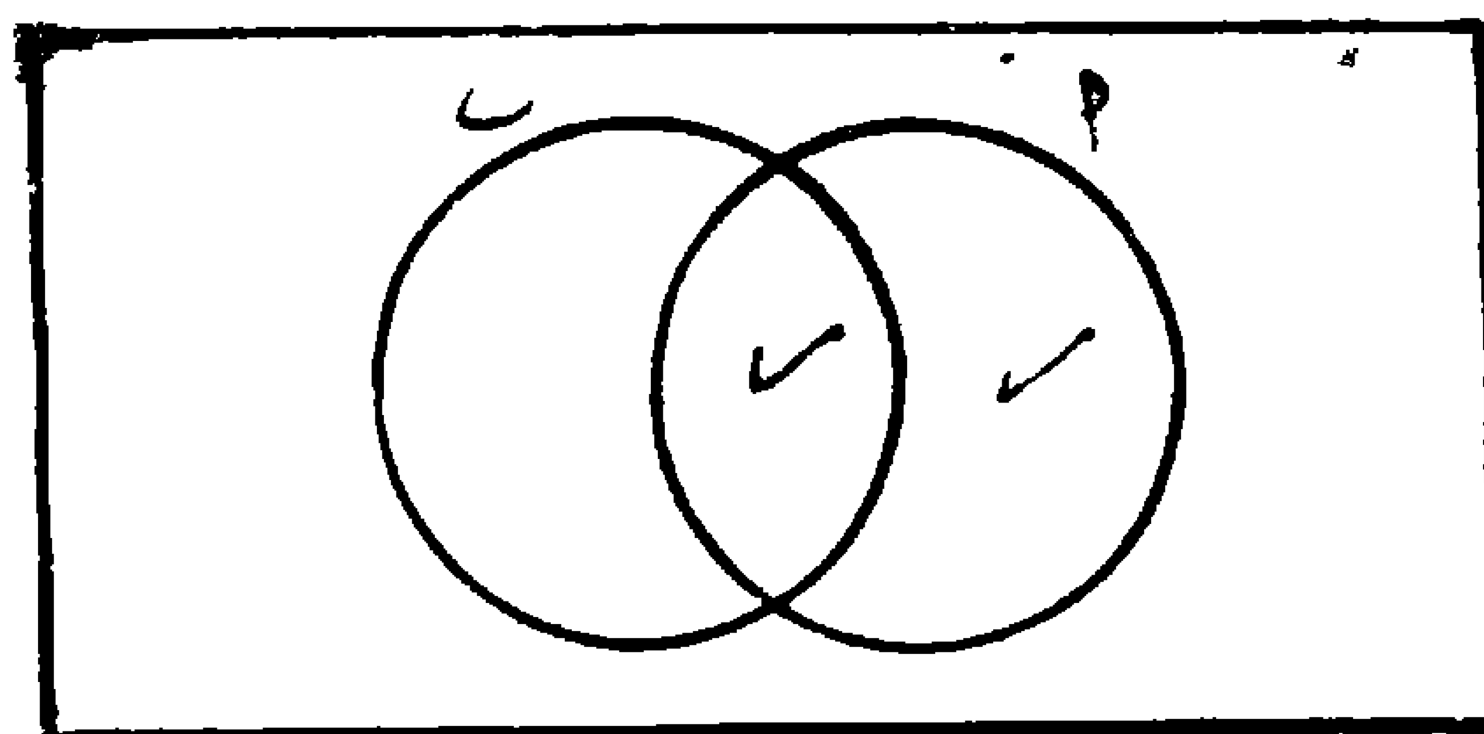
أولا — القضايا العطفيه الخالصه Pure

١ القضايا الجزئيه العطفيه Conjunctive Particular

ويمكن التعبير عن القضيه الجزئيه العطفيه رمزياً ، وبالشكل ، على النحو الآتى :

(ا ب ≠ صفر . ا بَ ≠ صفر)

وتقرأ : ا ب ليست بالفئه الفارغه ، كما أن ا بَ ليست كذلك فئه فارغه .



شكل ٣١

٢ — قضايا الفئات المتطابقة Coextensive Class-Propositions

وهى القضايا التى تفيد تضمن فئتين إحداهما فى الأخرى ، أى التى لو عبرنا عنها بالصيغة (كل ا هى ب) ، لكان المعنى المستفاد منها هو : أن الفئة ا متضمنة فى الفئة ب ، وأن الفئة ب متضمنة فى الفئة ا . وهذا يعنى أن الفئتين متساويتان من

حيث الأعضاء . (١)

وتتمثل الصورة العامه لهذا النوع من القضايا فى الصيغه التاليه :

(ا ، ا فقط هى ب) (٢)

وهى الصيغه التى نعبر عنها رمزياً على النحو الآتى :

(ا بَ = صفر . اَ ب = صفر)

أى من حيث هى قضية عطف لقضيتين إحداهما تثبت أن ا متضمنة فى ب ، والأخرى قضية إستبعادية تقرر أن ب متضمنة فى ا . (٣) ويمكن التعبير عن ذلك بالرسم كما يلى :

ب اَ   ب   ا   اَ ب

شكل ٣٢

---

(١) ولذا فإن الصيغة التالية . (ا = ب ≡ ا ⊃ ب . ب ⊃ ا) صيغة صحيحه ، وتقــرأ :
أن القول بأن الفئة ا تساوى الفئة ب ، يكافئ القول بأن الفئة ا متضمنة فى الفئة ب ، وبأن الفئة ب متضمنة فى الوقت نفسه فى الفئة ا .

(٢) . A and only A are B.

(٣) طالما أن (فقط ا هى ب) تـكافئ (كل ب هى ا) ، إرجع إلى صفحة .
وبهذا المعنى تفيد القضية (ا ، ا فقط هى ب) القضيتين التاليتين :
١ — كل ا هى ب ، أى (ا بَ = صفر) .

كما يمكننا أن نعبر عن هـــذه القضية ذاتها (أى قضية الفئات المتطابقة) ، باستخدام صيغة أخرى بديلة ، يذكر فيها الرمز الخاص بجمع الفئات مثل :

ا بَ + اَ ب = صفر (١)

هكذا يمكن القول بان القضايا الثلاث التالية ، قضايا متكافئة :

١ — (ا ، ا فقط هى ب) .

٢ — (ا بَ = صفر . اَ ب = صفر) .

٣ — (ا بَ + ب اَ = صفر) .

إلا أن مبدأ التـكافؤ هذا بين قضايا الفئات لا ينطبق فى حالة عدم التساوى مع الصفر ، فالقضية التالية : (ا ب + ا بَ ≠ صفر) ليست مكافئة للقضيه التاليه (ا ب ≠ صفر . ا بَ ≠ صفر) ، لأن القضيه الأولى تثبت وجود أعضاء إما فى الفئة ا ب أو فى الفئة ا بَ ، أو فيهما معاً ، فى حين أن القضية الثانية تثبت أن كلا من الفئتين ا ب ، ا بَ هى فئة ذات أعضاء بالفعل .

---

٢ — كل ب هى ا ، أى (لا اَ هى ب = اَ ب = صفر) .

هذا ويلاحظ أن هناك فارقاً بين القضيتين (ا فقط هى ب) وهى قضية إستبعادية ، وبين (ا ، ا فقط هى ب) وهى قضية تطابق بين فئتين . لأن الأولى لا تعنى إلا (كل ب هى ا) أى (اَ ب = صفر) ، فى حين أن الثانية تعنى ما تعنية الأولى وتزيد عليه القول بان (كل ا هى ب) أى (ا بَ = صفر) .

(١) ويمكن البرهنة على صحة هذا التعبير كما يلى :

∵ (ا ، ا فقط هى ب) تـكافىء (ا بَ = صفر . اَ ب = صفر)

∵ ا بَ + اَ ب = صفر + صفر .

∵ صفر + صفر = صفر

∴ ا بَ + اَ ب = صفر

∴ (ا ، ا فقط هى ب) تكافىء ا بَ + ا ب = صفر وهو المطلوب

٣ — القضايا الاستثنائية :

وهى القضايا التى تستثنى فيها فئة واحدة فقط من التضمن فى فئات أخرى غيرها . ولنأخذ بعض الأمثلة التى توضح ذلك :

(ا) الكل ماعدا الفلاسفة ، عمليون .

(ب) الفلاسفة وحدهم فقط ، غير عمليين .

(ج) لا أحد غير الفلاسفة ، هو غير عملى .

فالقضية الأولى ، تعنى أساساً : أن (جميع من هم غير فلاسفة ، عمليون) ، أو بعبارة أخرى أن كل من هو غير فيلسوف ، فهو عملى (أو أن كل من هو ليس ا هو ب) وهى قضية تاخذ الصيغة التالية :

(كل اَ هى ب)

فإذا كانت القضية : (كل ا ب) ، يرمز لها بالصيغة (ا بَ = صفر) .

فإننا نرمز للقضية : (كل اَ هى ب) بالصيغة : (اَ بَ = صفر)(١)

هكذا أمكن التعبير عن القضية الاستثنائية (الكل ماعدا ا هو ب) باعتبارها قضية كلية موجبة : (كل اَ هى ب) . إلا أننا نستطيع القول بأنها تعنى كذلك إثبات القضية الكلية السالبة (لا ا هى ب) ، أى (ا ب = صفر) .

ومن ثم فإن الصياغة الرمزية العطفية الدالة عليها ، يمكن أن تكون على النحو الآتى : —

---

(١) لأن : (كل اَ هى ب) تكافئ — باستخدام نقض المحمول — (لا اَ هى بَ)

∴ (لا ا هى ب) « ا ب = صفر .

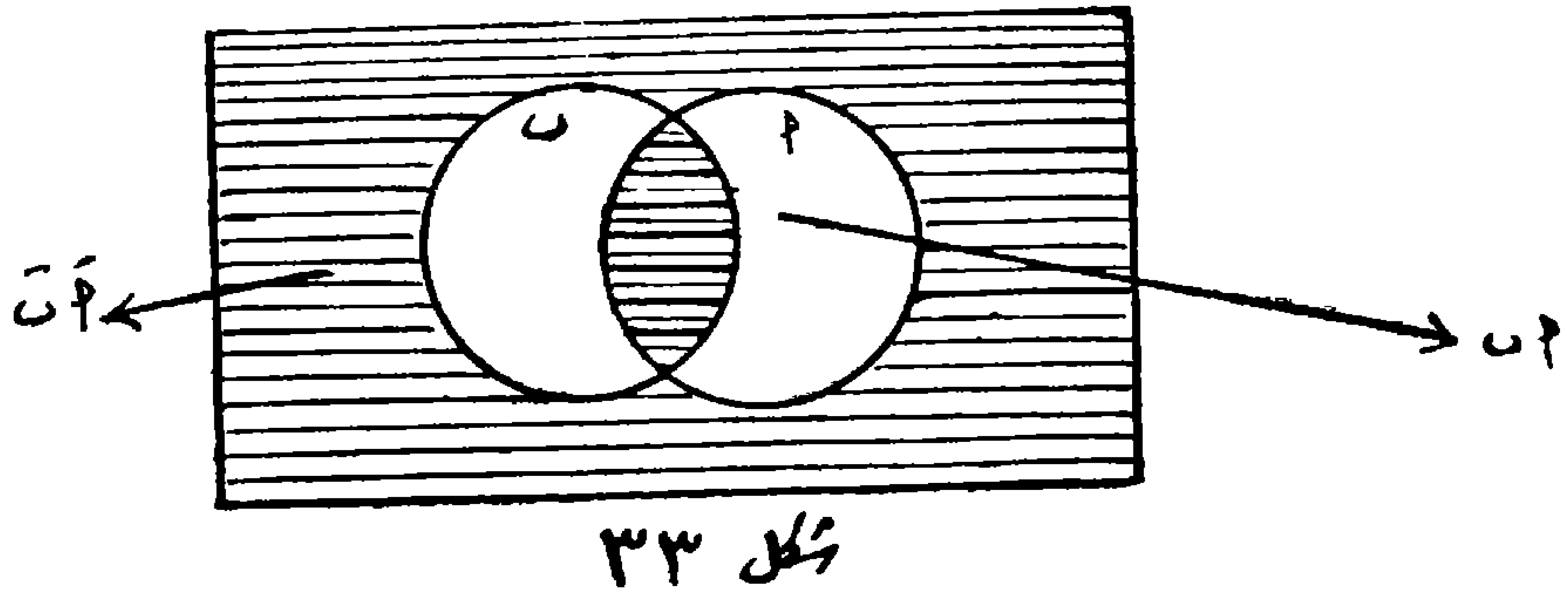
∴ (لا اَ هى بَ) « (اَ بَ = صفر) .

∴ (كل اَ هى ب) « (اَ بَ = صفر) . وهو المطلوب .

١ — (اَ بَ = صفر . ا ب = صفر)

٢ — (اَ بَ + ا ب = صفر).

ويمكن التعبير عن تلك الصياغة بالرسم كما يلى : —



شكل ٣٣

ثانياً : القضايا العطفية المختلطة Mixed Conjunctive Propositions

(أ) القضايا الوجودية الموجبة Existential

نحن نفرق عادة فى قضايا الفئات بين نوعين من القضايا الكلية ، من حيث دلالتها على وجود أو عدم وجود أعضاء فى الفئات التى تتكون منها . فإذا لم تكن دالة على أعضاء فى الفئات سميت القضية فى هذه الحالة بالقضية الشرطيه ، لأنها تأخذ صورة القضية الشرطية . والواقع أن جميع القضايا الكلية التى ذكرناها من قبل هى من هذا النوع .

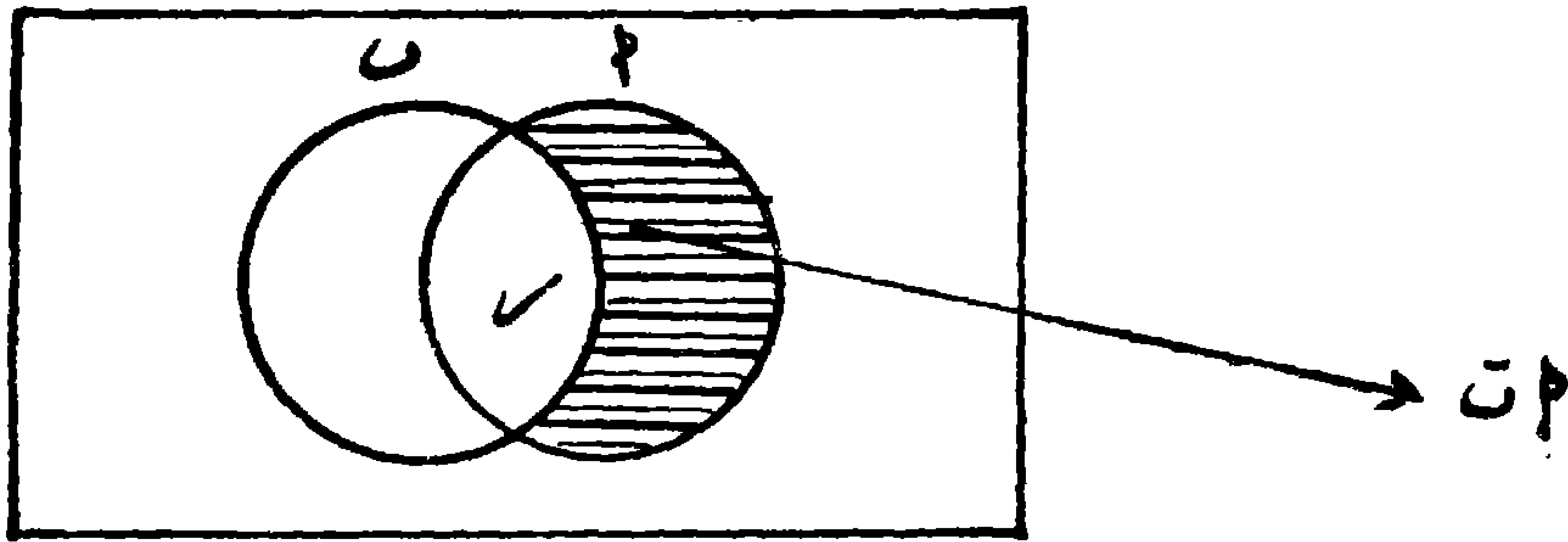
فالقضية التالية مثلا : (كل ا هى ب) ، تعنى أنه : (إذا كان هناك أعضاء فى الفئة ا ، فهى لابد وأن تكون متصفة بالصفة ب) . ويلاحظ فى هذه الحالة أننا لا نتكلم عن وجود أعضاء بالفعل فى الفئة ا ، إنما نقول أنه لو كان هناك وجود لهذه الأعضاء بالفعل ، لاتصفت بكذا وكذا من الصفات . ولقد عبرنا رمزيا عن هذا النوع من القضايا بالصيغة التالية (ا بَ = صفر) .

لكننا نستطيع أن نتكلم فى القضية الكلية الموجبة نفسها أيضا عن وجود أعضاء فى الفئة ا ، وأنها متصفة بالفعل بكونها ب . وفى هذه الحالة الجديدة نلاحظ أن القضية نفسها (كل ا هى ب) لا تثبت فقط أن (ا بَ = صفر) بل تثبت كذلك أن الفئة ا فئة ذات أعضاء . وبما أن الفئة ا فى شكل فن تتكون من فئتين إحداهما ا بَ والثانية ا ب ، وبما أن الفئة ا بَ لا يمكن أن تحتوى على أعضاء لأنها فئة فارغة أو مساوية للصفر ، إذن فلابد وأن يكون موضع هذه الأعضاء فى ذلك الجزء المتبقى من الفئة ا ، أى (ا ب) .

هكذا يكون فى استطاعتنا التعبير عن القضية الوجودية الموجبة رمزيا كما يلى : —

ا بَ = صفر . ا ≠ صفر

وبالرسم كما يلى : —



شكل ٣٤

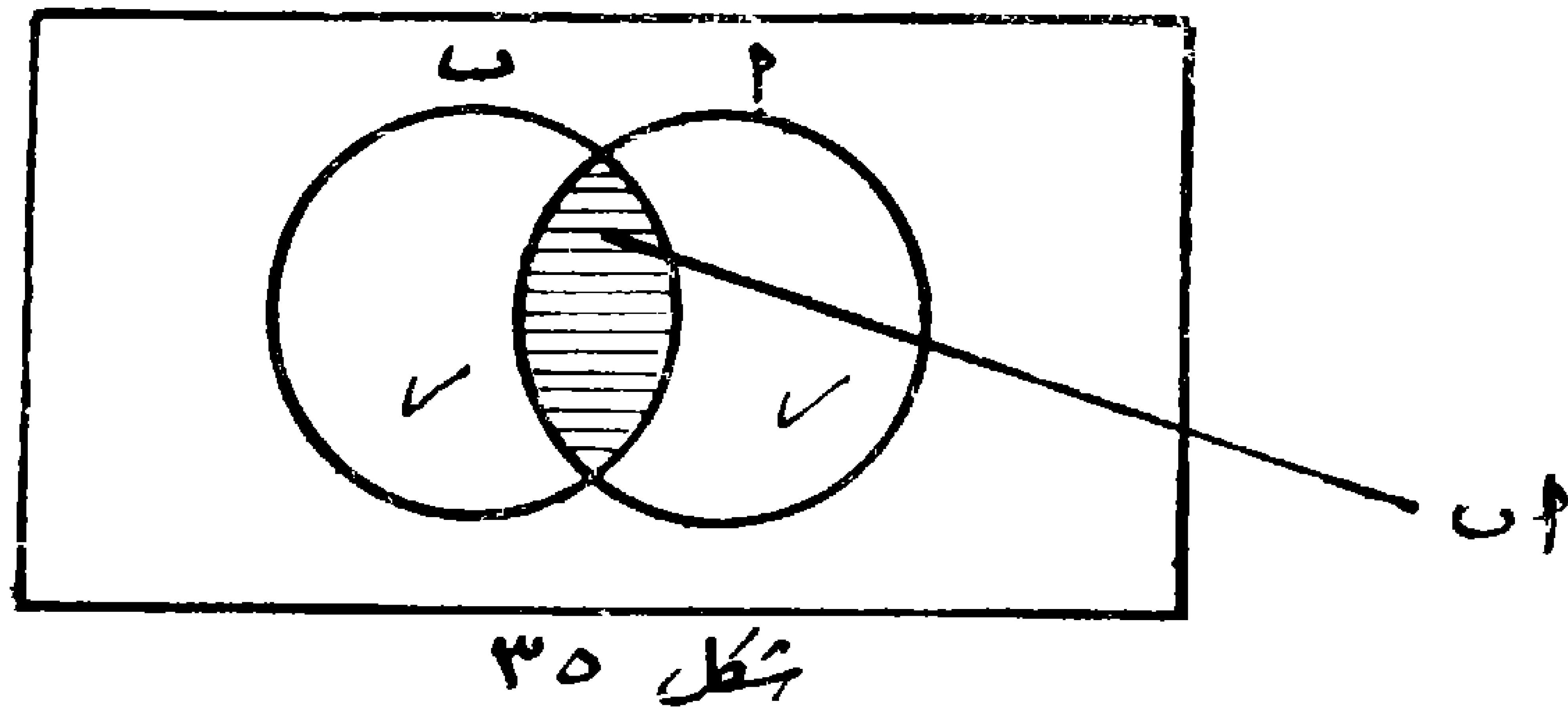
(ب) القضايا الوجودية السالبة Existantial Negative Prepositions

مثل (لا ا هى ب) ، وهى لا تعنى أيضا ، إذا استخدمت بالمعنى الشرطى وجود أى أعضاء فى الفئة ا ، بل تعنى (أنه إذا وجدت أى أعضاء فى الفئة ا ، كانت هذه الأعضاء غير متصفة بالصفة ب) . ولقد عبرنا عن هذا المعنى من قبل بالصيغة الرمزية (ا ب = صفر) .

أما إذا استخدمت هذه القضية بالمعنى الوجودى ، أمكننا التعبير عنها رمزيا كما يلى :

(اب = صفر . ا ≠ صفر . ب ≠ صفر)

وبالرسم كما يلى : —



شكل ٣٥

هذا ويمكننا تلخيص ما سبق من أنواع قضايا الفئات فى القائمة التالية : —

نوع قضية الفئة	صورتها المألوفة	الصياغة الرمزية	رقم الشكل المعبر عنها
I القضايا البسيطة			
Simple Propositions			
(ا) الكلية Universal	لا توجد أعضاء فى الفئة ا	ا = صفر	٢
(ب) الجزئية Particular	توجد بعض ا	ا ≠ صفر	
(حـ) المفردة Singular			
١ ــ الموجبة	س هى ا	س ∈ ا	١٦
٢ ــ السالبة	س ليست ا	س ∈ ا′	٢٧
II القضايا المركبة			
Compound propositions			
(ا) الكلية الشرطية			
Hypothetical			
١ ــ الموجبة	كل ا هى ب	ا ب′ = صفر	٢١
٢ ــ السالبة	لا ا هى ب	ا ب = صفر	٢٢
٣ ــ الاستبعادية	كل ب هى ا (فقط ا هى ب)	ا̄ ب = صفر	٢٣
(ب) الجزئية			
١ ــ الموجبة	بعض ا هى ب	ا ب ≠ صفر	٢٤
٢ ــ السالبة	بعض ا ليست ب	ا ب′ ≠ صفر	٢٥
(حـ) المفردة			
١ ــ الموجبة	س هى ا ب	س ∈ ا ب	٢٨
٢ ــ السالبة	س ليست ا ب	س ∈ $\overline{(\text{ا ب})}$	

القضايا العطفية Conjunctive Propositio[n]			
ا) الجزئية	بعض ا هي ب ، وبعض ا ليست ب	ا ب ≠ صفر . ا بَ ≠ صفر	٣١
(ب) ذات الفئات المتطابقة Coextensive	كل ا هي ب ، وكل ب هي ا	ا بَ = صفر . اَ ب = صفر	٣٢
(حـ) الاستثنائية Exceptive	كل اَ هي ب ، ولا ا هي ب	اَ بَ = صفر . ا ب = صفر	٣٣
(ى) الكلية			
١ ـ الموجبة	كل ا هي ب (ويوجد بعض ا)	ا بَ = صفر . ا ≠ صفر	٣٤
٢ ـ السالبة	لا ا هي ب (ويوجد بعض ا ، وأيضا بعض ب) .	ا ب = صفر . ا ≠ صفر . ب ≠ صفر	٣٥

الاستدلال الخاص بقضايا الفئات

يمكننا القول بصفة عامة ، أن الاستدلال الصحيح ، هو ذلك الذى تلزم فيه النتيجة لزوماً ضرورياً عن المقدمات . وبعبارة أخرى ، إذا كانت مقدمات الاستدلال الصحيح صادقة ، كانت نتيجته صادقة بالضرورة كذلك . وبالعكس ، فإذا كانت نتيجة الاستدلال ، الذى يحتوى على مقدمات صادقة — من الممكن أن تكون كاذبة — كان الاستدلال فى هذه الحالة غير صحيح .

أنواع الاستدلالات الخاصة بقضايا الفئات :

يمكن تصنيف الإستدلالات الخاصة بقضايا الفئات إلى صنفين أساسيين هما : إستدلالات بسيطة Simple Inferences ، وإستدلالات مركبة Compound

١ — الإستدلالات البسيطة : وهى تلك التى تتكون من قضيتين ، مقدمة ونتيجة ، مثل :

(ا = صفر) ⊃ (ا ب = صفر)

فى هذه الصياغة الرمزية السابقة ، تكون المقدمة هى : (ا = صفر) ، والنتيجة هى : (ا ب = صفر) . وتقرأ الصيغة الرمزية كلها على النحو الآتى : إذا كانت الفئة ا فئة فارغة ، كانت إذن الفئة ا ب فئة فارغة أيضاً أو تقرأ : إذا لم يكن هناك أى فرد من أفراد الفئة ا ، كانت إذن ا ¯هى ب .

٢ — أما الإستدلالات المركبة : فهى التى تحتوى فيها المقدمات أو النتائج على أكثر من قضية واحدة مثل :

[(ا = صفر) . (ب = صفر)] ≡ (ا + ب = صفر)

وتقرأ : إن القول بأن الفئة ا فئة فارغة ، والقول كذلك بأن الفئة ب فئة فارغة ، كل هذا يلزم عنه أن تكون الفئة (ا + ب) فئة فارغة أيضاً .

ومثل : (ا + ب = صفر) ⊃ [(ا = صفر) . (ب = صفر)]

واللزوم هنا عكس اللزوم السابق ، ولذا فإننا نقرأ : إن القول بأن الفئة (ا + ب) فئة فارغة ، يلزم عنه القول بأن الفئة ا فئة فارغة ، وأن الفئة ب فئة فارغة أيضاً . هذا ويمكننا — من المثالين السابقين للاستدلال المركب — أن نلاحظ أن دور المقدمات والنتيجة يمكن أن يكون منعكساً . أى أن هناك نوعاً من الاستدلال المتبادل — أو التكافؤ Equivalence — يمكن أن ينشأ بين مثل هذه القضايا . ويمكن توضيح ذلك بالصيغة التالية :

[(ا = صفر) . (ب = صفر)] ≡ (ا + ب = صفر) .

وتقرأ : إن القول بأن ا فئة فارغة ، وبأن ب فئة فارغة أيضاً ، يكافىء القول بأن الفئة (ا + ب) فئة فارغة . والعكس صحيح .

إختبار صحة الإستدلالات :

يمكن إختبار صحة الإستدلالات الخاصة بقضايا الفئات بأكثر من طريقة ، وسنقتصر هنا على ذكر طريقتين أساسيتين :

١ — باستخدام شكل فن .

٢ — أو باستخدام الإختبار الرمزى الموسع .

أولا : إختبار صحة الإستدلالات بإستخدام الشكل :

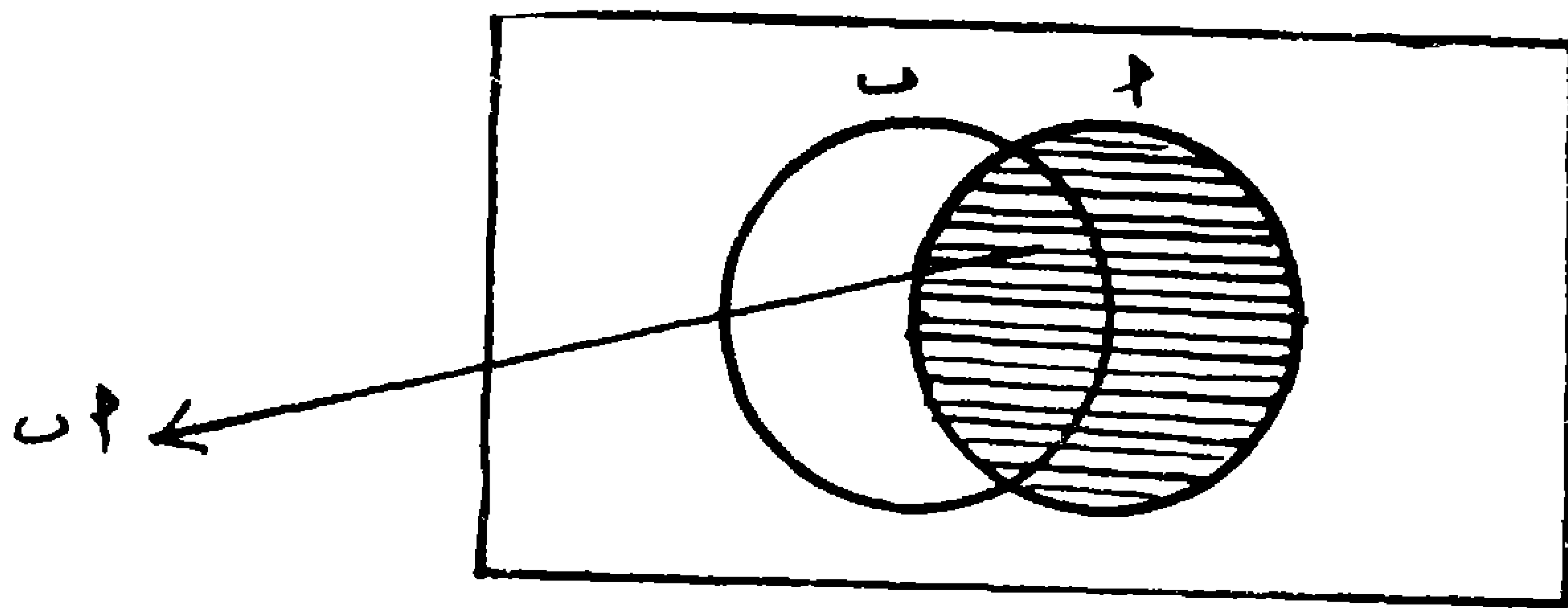
إن أية قضية أو مجموعة من القضايا ، تحتوى على فئات لا تزيد عن ثلاث ، إذا

كان من الممكن التعبير عنها رمزيا فى منطق الفئات ، فانه من الممكن أيضاً التعبير عنها بواسطة شكل فن . وذلك لأن الاستدلال — كما رأينا — لا يكون صحيحا إلا إذا كانت بنيته من النوع الذى يكون صدق المقدمات فيها يتطلب صدق النتيجة . ولذا فاننا إذا قمنا بادخال المقدمات فقط ، الخاصة باستدلال صحيح ، على شكل فن ، فاننا نتوقع وجود النتيجة بالفعل فى الشكل نفسه . أما إذا كان الإستدلال غير صحيح ، فان الشكل الخاص بالمقدمات لن يؤدى إلى إظهار النتيجة . ولنوضح ذلك بالأمثلة الآتية : —

١ — لو كان لدينا الاستدلال البسيط التالى : —

(ا = صفر) ⊃ (ا ب = صفر)

وأردنا أن نختبر مدى صحته ، فاننا نقوم بادخال مقدمته (ا = صفر) على شكل فن فنحصل بذلك على :



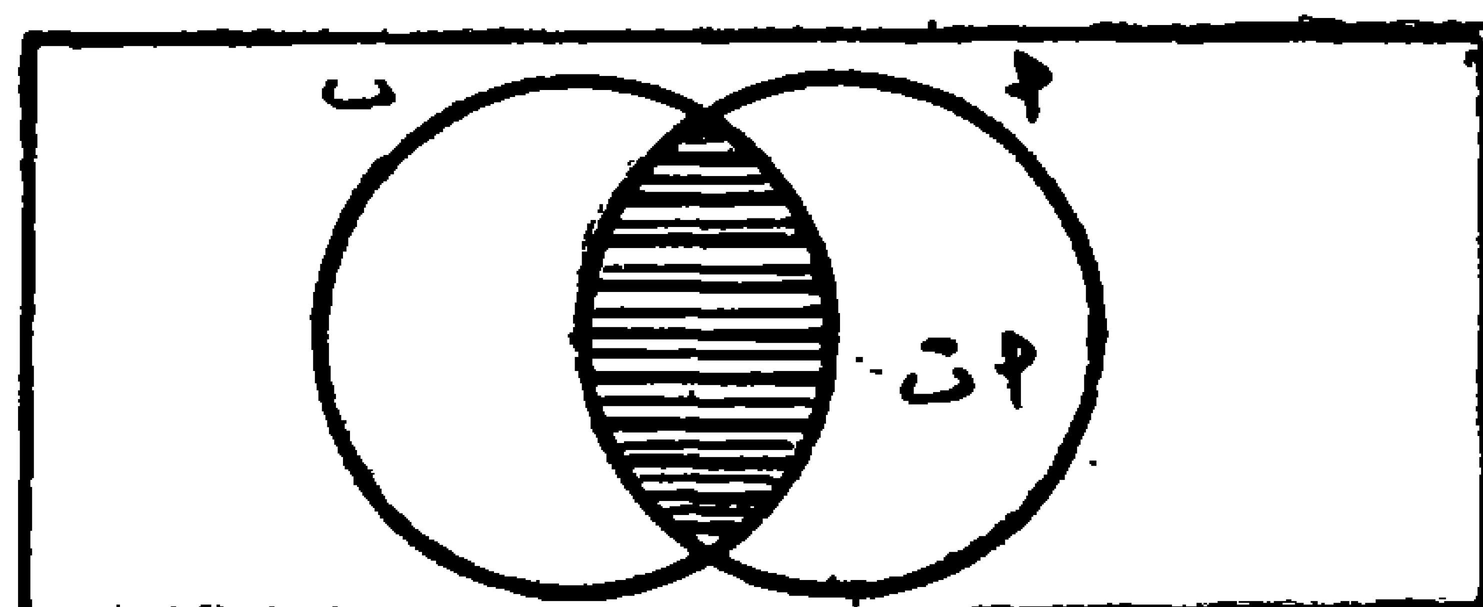
شكل ٣٦

فى هذا الشكل ، يمكننا أن نتبين فى الحال ، أن النتيجة (ا ب = صفر) ، حاضرة وموجودة بالفعل ، أى أنها متضمنة بالفعل فى القول بالمقدمة ، ولازمة عنها فى الوقت نفسه ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — ومع ذلك ، فنحن إذا ما اختبرنا عكس الإستدلال السابق ، أى :

(ا ب = صفر) ⊃ (ا = صفر)

بالطريقة ذاتها لحصلنا على الشكل التالى :



شكل ٣٧

وهنا نرى بوضوح أن النتيجة (ا = صفر) ليست لازمة بالضرورة عن المقدمة (ا ب = صفر) طالما أن الفئة ا تتكون من فئتين فرعيتين هما (ا ب) ، (ا بَ) ، وقد عرفنا عن الأولى أنها مساوية للصفر ، لكننا لا نعرف شيئاً عن الفئة (ا بَ) وما إذا كانت مساوية هى أيضاً للصفر أم لا . وعلى ذلك فالنتيجة قد تكون صادقة وقد تكون كاذبة ، ومن ثم فالاستدلال غير صحيح .

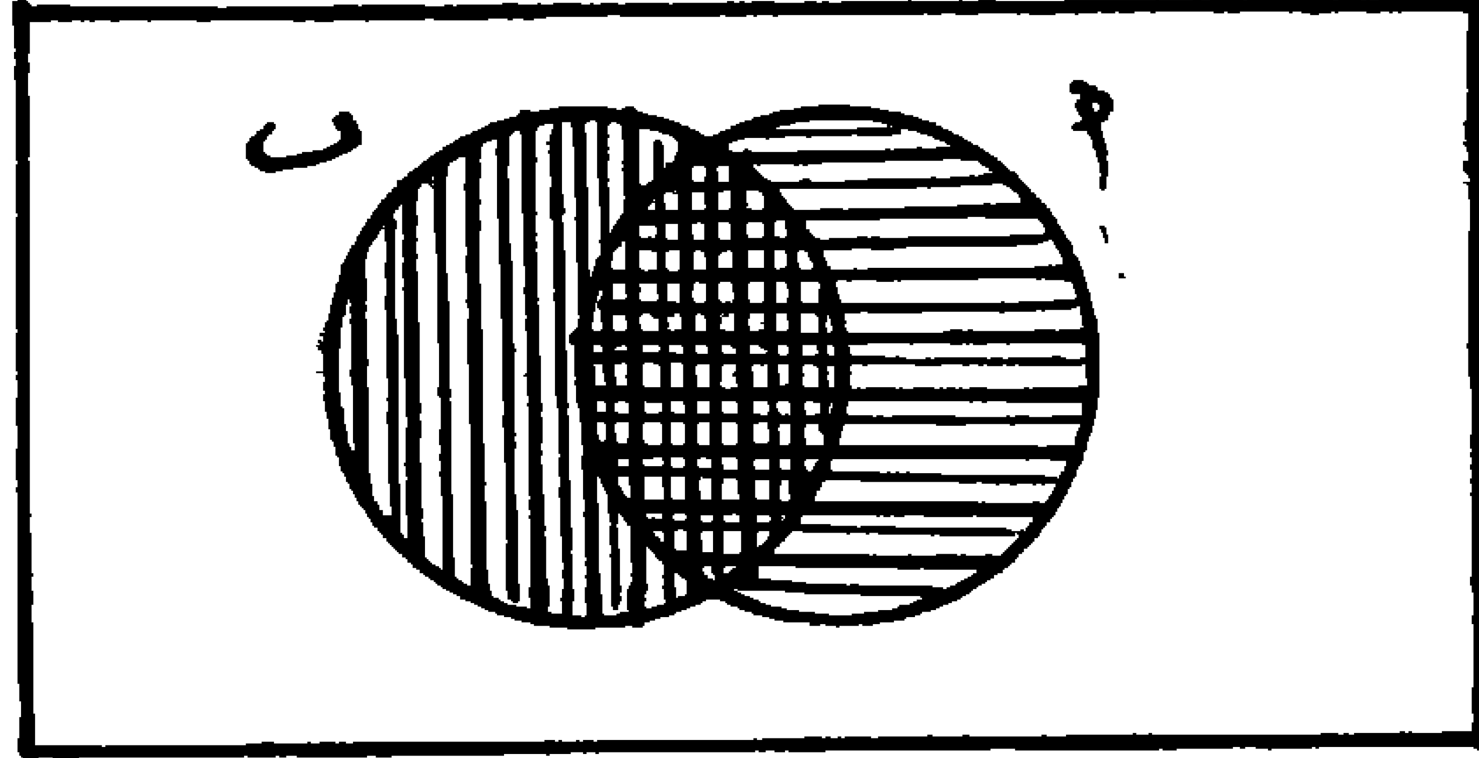
٣ — لو كان لدينا الاستدلال التبادلى(١) الذى يلزم عن قضية التكافؤ التالية :

[(ا = صفر) . (ب = صفر)] ≡ (ا + ب = صفر)

وأردنا أن نتبين مدى صحته ، فاننا نقوم بادخال إحدى القضيتين المتكافئتين على شكل فن على النحو الآتى :

---

(١) والإستدلال التبادلى reciprocal inference هو القائم على تكافؤ قضيتين ، بحيث تلزم فيه كل واحدة منهما عن الأخرى .



شكل ٣٨

فيتضح لنا صدق القضية الأخرى مباشرة من الشكل . ومن ثم فإن هذا الشكل يكون برهانا على صحة قضية التكافؤ التالية : —

١ — ([ا = صفر) . (ب = صفر)] ≡ (ا + ب = صفر)[1] .

---

(١) هذا ومن الممكن أن نبرهن بطريقة أخرى على صحة هذه العبارة الرمزية وكذا العبارتين التاليتين — وسوف نذكر هذا البرهان ، وإن كان مطولا — حتى يمكن من مقارنة هذه الطريقة بواسطة استخدام الشكل مباشرة ، أن نتبين كم من الجهد والوقت قد وفرناه باستخدام طريقة الشكل فى التعرف على صحة الاستدلال . وفيما يلى هذه الطريقة الأخرى :

بما أن العبارة الرمزية المعينة تدل على التكافؤ ، فهى تدل على لزوم متبادل ، ولذا فعلينا أن نبرهن على أن : ١ — (ا + ب = صفر) ⊃ [(ا = صفر) . (ب = صفر)] ، ٢ — وعلى أن : [(ا = صفر) . (ب = صفر)] ⊃ (ا + ب = صفر) . وذلك على النحو الآتى : —

البرهان :

أولا : ∵ ا + ب = $\overline{(\text{اَ بَ})}$	(النتيجة الرابعة من شكل فن)
∵ ا + ب = صفر	(فرضا)
∴ $\overline{(\text{اَ بَ})}$ = صفر	

وأيضا على صحة عبارتى اللزوم اللتين تنتجان عنها وهما :

٢ — [(ا = صفر) . (ب = صفر)] ⊃ (ا + ب = صفر) .

٣ — (ا + ب = صفر) ⊃ [(ا = صفر) . (ب = صفر)] .

= ∴ ا َ ب َ = ا (وهذا مايتضح كذلك من النتيجة رقم ٣ لشكل فن وهى :
١ = ا + ب + ا َ ب َ ، فلو وضعنا الصفر بدلا من (ا + ب)
لحصلنا على : ١ = ا َ ب َ) .

∵ ا × ١ = ا　　∴ ا = ا × ١

∴ ا = ا × (ا َ ب َ)

= ا × ا َ × ب َ　　= (ا × ا َ) × ب َ

= صفر × ب َ　　= صفر

∴ ا = صفر .

، ∵ ب × ١ = ب　　∴ ب = ب × ١

∴ ب = ب × ا َ ب َ

= ب × ب َ × ا َ　　= (ب × ب َ) ا َ

= صفر × ا َ　　= صفر

∴ ب = صفر .

∴ (ا + ب = صفر) ⊃ [(ا = صفر) . (ب = صفر)] .

وهو المطلوب أولا .

ثانيا : لو كانت ا = صفر ، وكانت ب = صفر

كانت إذن ا + ب = صفر + صفر

، ∵ صفر + صفر = صفر

∴ ا + ب = صفر

∴ [(ا = صفر) . (ب = صفر)] ⊃ (ا + ب = صفر) .

وهو المطلوب ثانيا .

(ا) إختبار صحة الاستدلالات البسيطة

أولا : الاستدلالات البسيطة القائمة على النفي المزدوج :

هناك نوع شائع من الاستدلالات القائمة على أساس قانون النفي المزدوج(١) وعادة ما يسمى هـذا النوع من الاستدلال ، بالاستدلال القائم على النقض Obuersion ، وهو الذي نستدل فيه على صدق أو كذب قضية ما ، بناء على صدق أو كذب القضية الناقضة لها (٢) أي المخالفة لها في الكيف . ولذا فالنقض ييسر لنا عملية التعبير عن قضية ما بواسطة قضية أخرى مختلفة معها كيفا . وذلك على النحو الآتي : —

نقض القضايا الكلية :

١ — الكلية الموجبة : كل ا هي ب ≡ لا ا هي بَ

والتي نعبر عنها رمزيا على النحو الآتي : —

(ا بَ = صفر) ≡ (ا بَ = صفر)

٢ — الكلية السالبة : لا ا هي ب ≡ كل ا هي بَ

والتي نعبر عنها رمزيا على النحو الآتي : —

(ا ب = صفر) ≡ (ا بً = صفر)

---

(١) الذي يأخذ صورة ا = اً .

(٢) والمقصود بالنقض هنا هو نقض المحمول ، ولذا فالقضية الناقضة ليست هي القضية المتناقضة مع قضية ما . فلو كانت لدينا قضية مثل (كل ا هي ب) ، كانت القضية الناقضة لها ، أي منقوضة المحمول هي : (لا ا هي بَ) ، في حين تكون القضية المتناقضة معها هي : (ليس بعض ا هي ب).

نقض القضايا الجزئية :

١ — الجزئية الموجبة : بعض ا هى ب ≡ بعض ا ليس بَ

ونعبر عنها رمزيا كما يلى : —

(ا ب ≠ صفر) ≡ (ا بَ ≠ صفر)

٢ — الجزئية السالبة : بعض ا ليس ب ≡ بعض ا هى بَ

ونعبر عنها رمزيا كما يلى : —

(ا بَ ≠ صفر) ≡ (ا بَ ≠ صفر)

نقض القضايا المفردة :

١ — المفردة الموجبة : س هى ا ≡ س ليست اَ

ونعبر عنها رمزيا : (س ⊂ ا) ≡ (س ⊂ اَ)

٢ — المفردة السالبة : س ليست ا ≡ س هى اَ

ونعبر عنها رمزيا : (س ⊂ اَ) ≡ (س ⊂ ا)

ثانيا : الاستدلالات البسيطة القائمة على التبادل :

وهناك نوع آخر من الاستدلال البسيط ، وهو ذلك الذى نقوم فيه بالتعبير المتبادل لحدى فئتين فى قضية مركبة . ويسمى مثل هذا الاستدلال عادة ، إذا كان قائما على مجرد التبادل (مثل ا ب = ب ا) باسم الاستدلال بالعكس Connersion . أما إذا كان قائما على التبادل ، وعلى النفى المزدوج فى الوقت نفسه ، سمى الاستدلال فى هذه الحالة بالاستدلال بواسطة عكس النقيض Contraposition .

(ا) العكس :

والاستدلال بالعكس البسيط يكون صحيحا فى حالتين فقط هما حالة القضية

الـكلية السالبة وحالة القضية الجزئية الموجبة ، فهما تعكسان إلى قضية كلية سالبة ، وقضية جزئية موجبة على الترتيب.

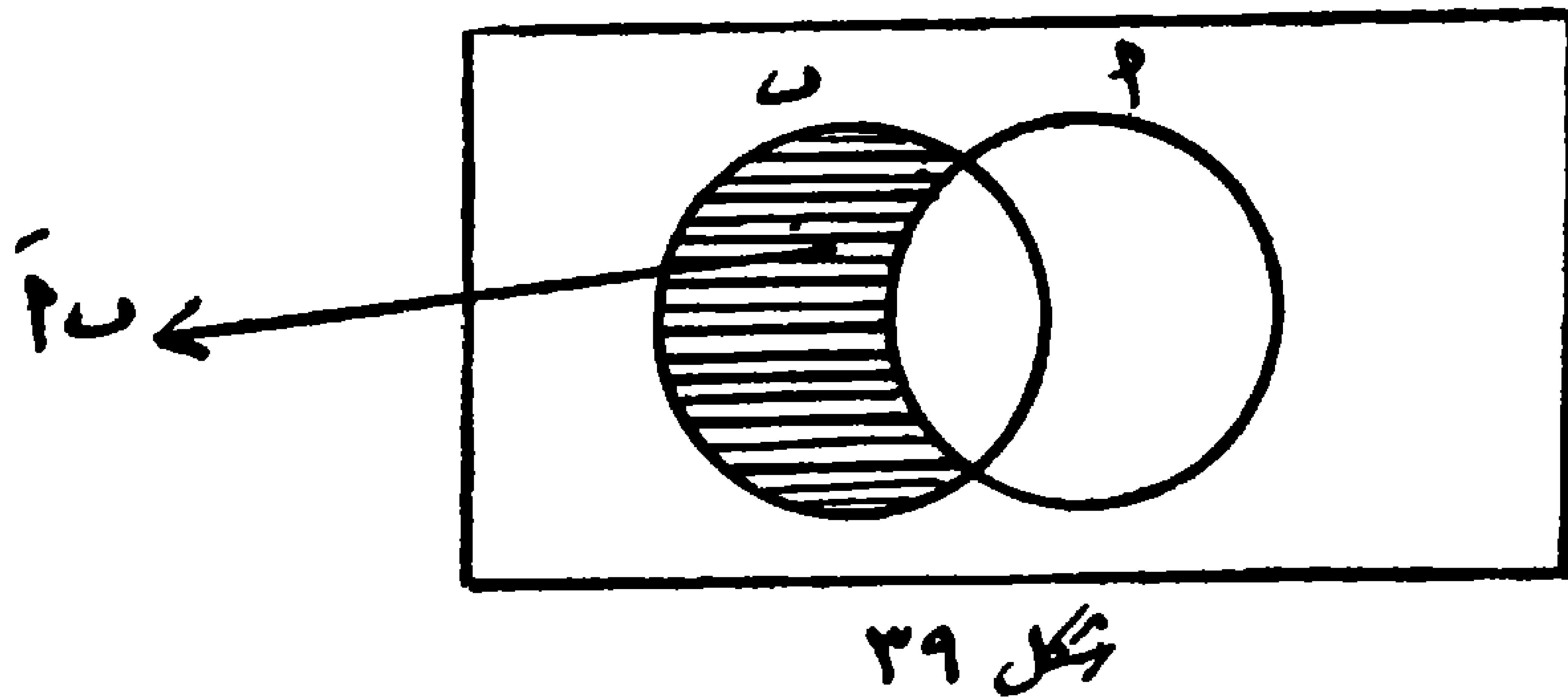
١ — الـكلية السالبة : لا ا هى ب ≡ لا ب هى ا

ونعبر عنها رمزيا : (ا ب = صفر) ≡ (ب ا = صفر).

٢ — الجزئية الموجبة : بعض ا هى ب ≡ بعض ب هى ا.

ونعبر عنها رمزيا : (ا ب ≠ صفر) ≡ (ب ا ≠ صفر).

أما عكس القضية الـكلية الموجبة أو الجزئية السالبة عكسا مستويا فهو استدلال غير صحيح وهذا ما يتضح من الشـكلين ، وكذا من الصياغتين الرمزيتين الخاصتين بهما . ففى الشـكل ٢١ الخاص بالقضية (كل ا هي ب) نلاحظ أننا قد ظللنا الفئة ا بَ ، فى حين أننا لو عكسناها إلى (كل ب هى ا) لحصلنا على الشـكل التالى : —



شكل ٣٩

الذى يختلف عن الشـكل رقم ٢١ . ومن ثم فالقضيتان اللتان نعبر عنهما بالشـكلين المختلفين هما كذلك مختلفتان فى الصدق . ومن ثم يكون إستدلالنا على صدق إحداها بناء على صدق الأخرى ، غير صحيح .

وبالمثل فى حالة الصياغة الرمزية ، فنحن حين نطبق قانون التبادل على الصيغة الرمزية الخاصة بالقضية الكلية الموجبة ، أى : (ا بَ = صفر) ، فإننا نحصل على :

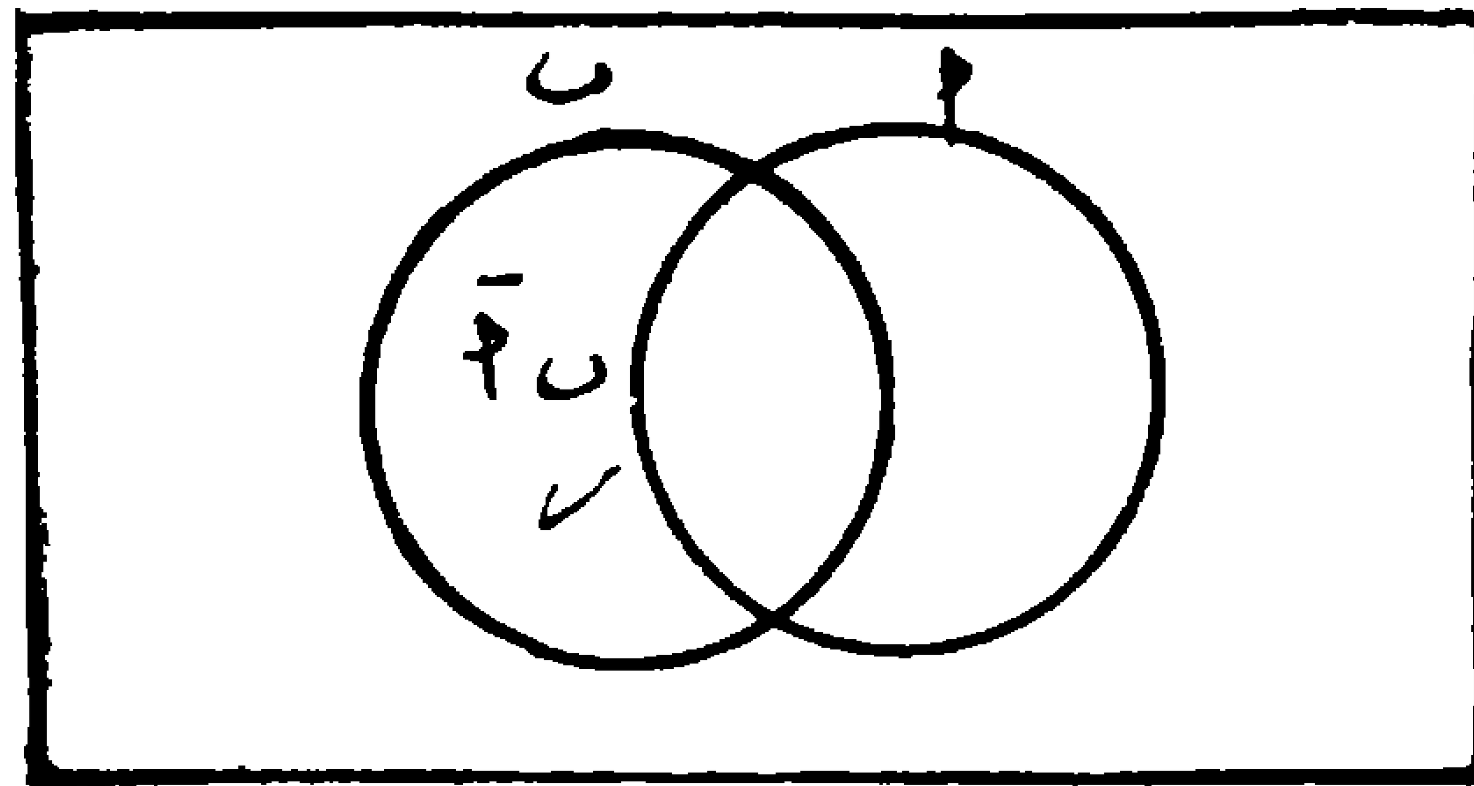
(بَ ا = صفر)(١)

التى يجب أن تقرأ : (لا بَ هى ا) ، وهى التى يمكن أن ترتد فى تحليلنا الأخير لها إلى القضية الكلية الموجبة الأصلية (كل ا هى ب) ، ولا تنتهى بنا أبدا إلى (كل ب هي ا) أوالصياغة الرمزية الخاصة بها وهى : (ب اَ =صفر). وللبرهنة على ذلك ، نذكر ما يلى :

١ — إن (لا بَ هى ا) قضية كلية سالبة ، ومن ثم تعكس عكسا بسيطا صحيحا فتصبح (لا ا هى بَ) .

٢ — بنقض المحمول بهذه القضية الأخيرة ، نحصل على (كل ا هى ب) ، ولا نحصل على (كل ب هى ا) . وعلى ذلك فالقضية الكلية الموجبة لا تعكس عكساً بسيطاً ، ومن ثم فالاستدلال على عكسها بهذا الشكل يكون استدلالا غير صحيح .

كما أننا نلاحظ فى الشكل رقم ٢٥ الخاص بالقضية (ليس بعض ا هى ب) إننا قد وضعنا العلامة (√) الخاصة بعضوية الفئة ، فى الفئة (ا بَ) . فى حين أننا لو عكسناها إلى (ليس بعض ب هى ا) لحصلنا على الشكل التالى :



شكل ٤٠

(١) لأن : ا × بَ = بَ × ا بناء على قانون التبادل .

الذى يختلف عن الشكل رقم ٢٥ . ومن ثم فالقضيتان اللتــان نعبر عنهما بالشكلين المختلفين هما كذلك مختلفتان فى الصدق . ومن ثم يكون إستدلالنا على صدق إحداهما بناء على صدق الأخرى غير صحيح .

(ب) عكس النقيض :

ونستدل فيه على تكافؤ قضيتين إحداهما تمثل عكس الأخرى مع نقص إحدي الفئتين للمعكوستين ، ولذا فالإستدلالان التاليان صحيحان :

١ — كل ا هى ب ≡ كل بَ هى اَ(١)

ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلى :—

(ا بَ = صفر) ≡ (بَ ا = صفر) ≡ (بَ اَ = صفر)

٢ — ليس بعض ا هى ب ≡ ليس بعض بَ هى اَ(٢)

ونعبر عن ذلك رمزيا كما يلى :—

(ا بَ ≠ صفر) ≡ (بَ ا ≠ صفر) ≡ (بَ اَ ≠ صفر)

من المثالين السابقين ، يلاحظ إننا قد إتبعنا خطوتين للوصول إلى التعبير الرمزى

---

(١) والمقصود هنا عكس النقيض الموافق . وهو فى حالة القضيه الكليه الموجبه يتم على النحو الآتى :—

كل ا هى ب ←(نقض) لا ا هى بَ ←(عكس) لا بَ هى ا ←(نقض) كل بَ هى اَ .

(٢) وذلك كما يلى : ليس بعض ا هى ب ←(نقض) بعض ا هى بَ ←(عكس) بعض بَ هى ا ←(نقض) ليس بعض بَ هى اَ .

الخاص بعكس النقيض(١) وذلك كما يلى :

أولا : نذكر القضية المكافئة للقضية الأصلية بتطبيق مبدأ التبادل .

ثانياً : نذكر القضية المكافئة للقضية الثانية بإستخدام مبدأ النفى المزدوج .

فإذا لم يتضح لنا للوهلة الأولى أن قضية التكافؤ الأخيرة فى كل من هذين الإستدلالين السابقين هى قضية عكس النقيض للأولى ، فإننا نوضح الأمر على النحو الآتى :

إذا كانت (ا بَ = صفر) تقرأ : (كل ا هى ب) ، أمكننا إذن أن نقرأ (بَ اً = صفر) كما يلى : (كل بَ هى اَ) ، وذلك لأن :

١ — (بَ اً = صفر) ≡ (بَ ا = صفر) .

(باستخدام قانون النفى المزدوج)

وبما أن (بَ ا = صفر) ≡ (ا بَ = صفر)

(باستخدام قانون التبادل)

وبما أن (ا بَ = صفر) ≡ (كل ا هى ب)

ولأن ٢ — (كل بَ هى اَ) ، هى عكس النقيض الموافق للقضية (كل ا هى ب) .

∴ فنحن نقرأ : (بَ اَ = صفر) على أنها (كل بَ هى اَ) ، طالما أن الصيغتين تعبران عن قضية واحدة هى (كل ا هى ب) .

وفى الإستدلال الثانى نقول : إذا كانت (ب اَ ≠ صفر) تقرأ (بعض ب

---

(١) ويلاحظ فى المنطق التقليدى أننا كنا نتبع ثلاث خطوات للوصول عكس النقيض الموافق هى : النقض ثم العكس ثم النقض مرة أخرى .

ليس ا) ، أمكننا إذن أن نقرأ (بَ اً ≠ صفر) كما يلي : (بعض بَ ليس اَ).
وذلك لأن :

١ — (بعض بَ ليس اَ) هي عكس النقيض الموافق للقضية (ليس بعض ا هي ب) .

٢ — ولأن (بَ اً ≠ صفر) ≡ (بَ ا ≠ صفر)

(بتطبيق قانون النفي المزدوج)

، ∴ (بَ ا ≠ صفر) ≡ (ا بَ ≠ صفر)

(بتطبيق قانون التبادل)

، ∴ (ا بَ ≠ صفر) ≡ (ليس بعض ا هي ب)

∴ فنحن نقرأ الصيغة (بَ اً ≠ صفر) على أنها (ليس بعض بَ هي ا)، طالما أن الصيغتين تعبران عن قضية واحدة هي (ليس بعض ا هي ب) .

ثالثاً : الإستدلالات البسيطة القائمة على التقابل بالتناقض :

بما أن أى قضيتين متناقضتين ، تكون لهما دائماً قيم صدق متقابلة ، فإننا نستطيع التعبير عن هذه العلاقة بإستخدام الرمز الدال على نفي القضية « ـ » . وهكذا فالتقابل مثلا بين القضيتين : (لا وجود لأى ا) ، (يوجد بعض ا) ، يمكن التعبير عنه رمزياً كما يلي :—

(ا = صفر) ≡ ـ (ا ≠ صفر)

وتوضح هذه الصيغة الرمزية أن إثبات (ا = صفر) ، يكافىء نفي (ا ≠ صفر) . وبعبارة أخرى نقول : لو كانت الفئة ا فئة فارغة ، كان من الكذب إذن أن نقول إن الفئة ا ليست فارغة . والعكس بالعكس . ومثل هذا التقابل يمكن كتابته أيضاً على النحو الآتي :

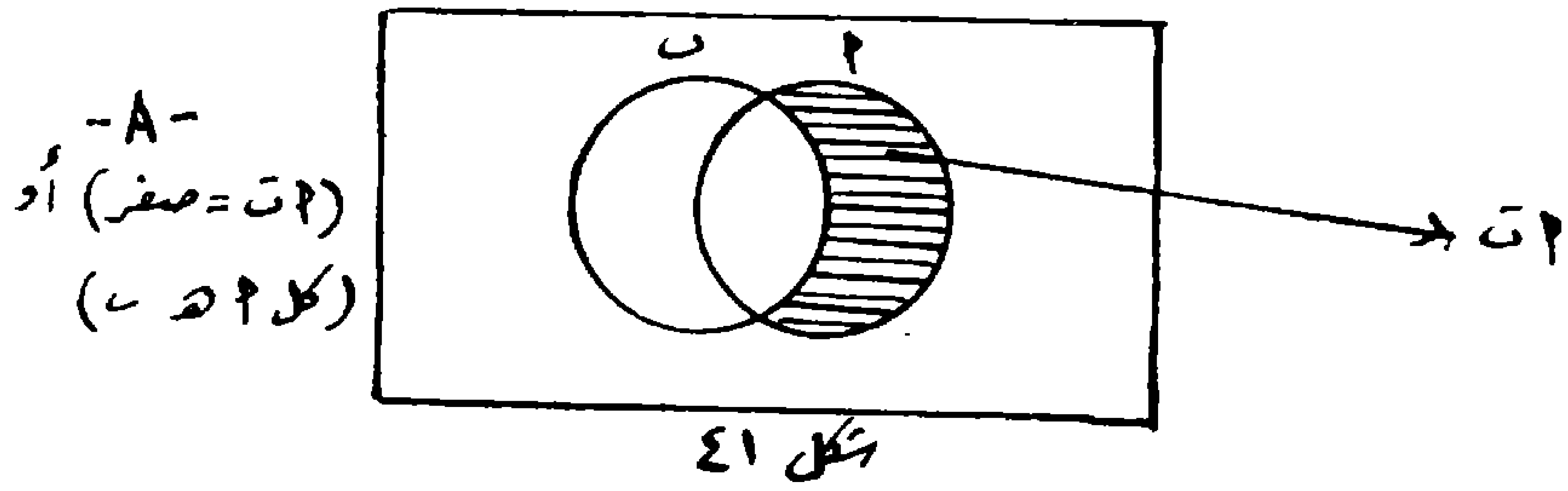
ب (ا = صفر) ≡ (ا ≠ صفر) .

وتقرأ : إن كذب القول بأن ا فئة فارغة ، مكافىء القول بأن ا ليست فئة فارغة .

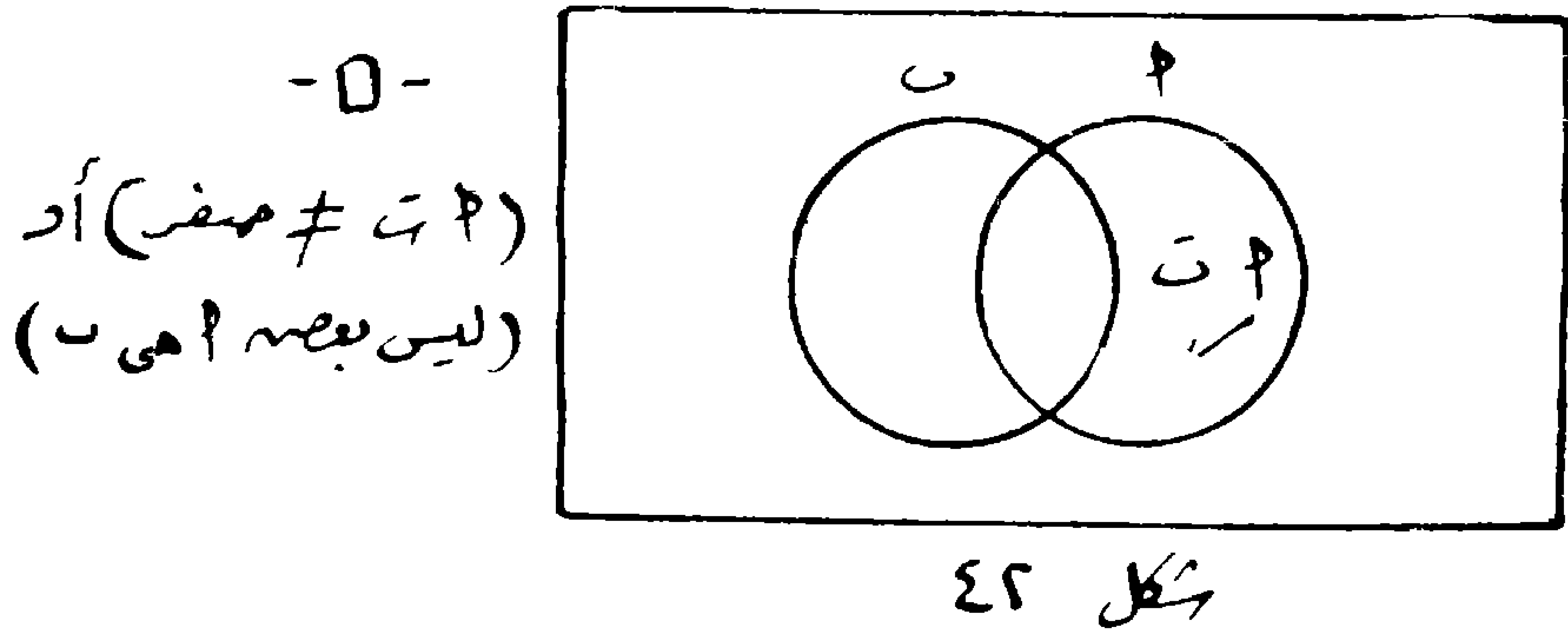
هذا ويمكن التعبير عن التقابل بين قضايا الفئات بالرمز والشكل على النحو الآتى :—

(١) (ا بَ = صفر) ≡ - (ا بَ ≠ صفر)

وهى صياغة تعبر عن التناقض بين القضيتين : الكلية الموجبة ، والجزئية السالبة . وهذا ما يتضح من الشكلين التاليين :—



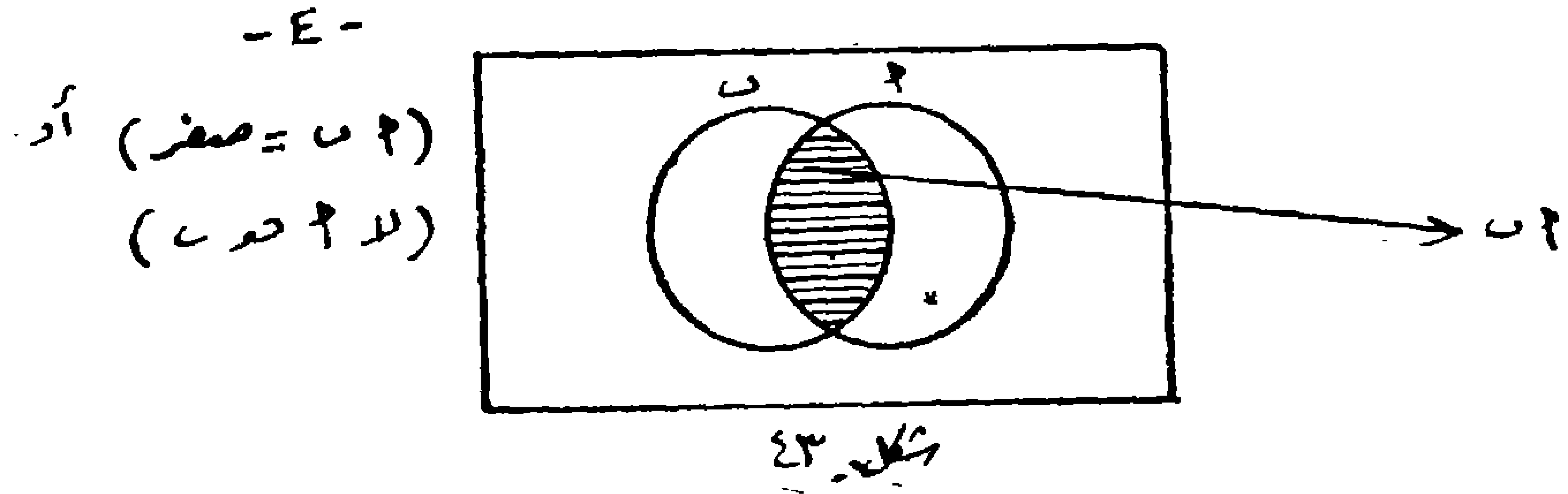
شكل ٤١

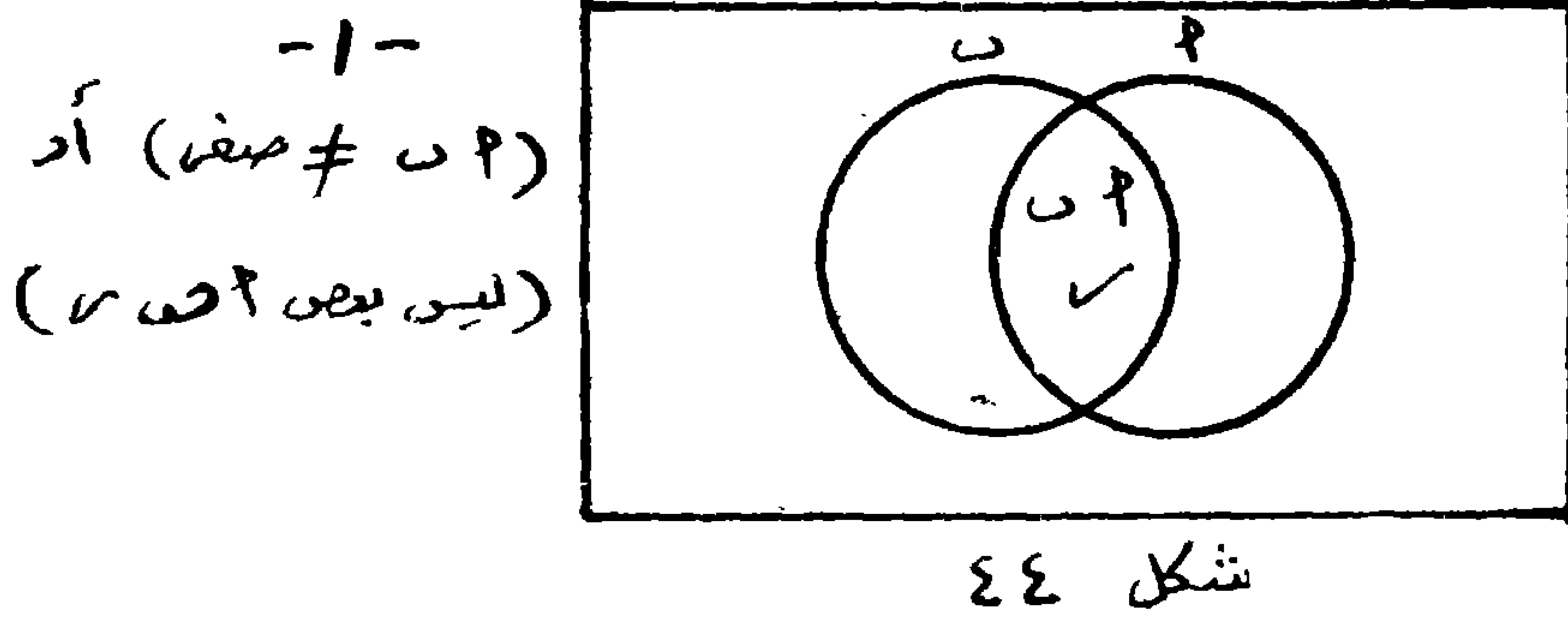


شكل ٤٢

(٢) (ا ب = صفر) ≡ - (ا ب ≠ صفر)

وهى صيغة تعبر عن التناقض بين القضيتين : الكلية السالبة ، والجزئية الموجبة ، وهذا ما يتضح من الشكلين التاليين :





شكل ٤٤

لكن ما هى القضية التى تتناقض مع القضية المفردة ؟ إن القضية المفردة يمكن إعتبارها متناقضة مع قضية أخرى مفردة ، مختلفة معها فى الكيف . وعلى ذلك فصيغة التكافؤ التالية ، صيغة صحيحة :—

س(≡ ا ≡ س (ـ (≡ ا َ)

هكذا يصبح فى استطاعتنا أن نستدل على صدق قضية ، بناء على صدق أو كذب القضية التى تناقضها ، وأن نستدل على صدق قضية بناء على صدق أو كذب نفى نقيضها .

(ب) اختبار صحة الاستدلالات المركبة

أولا : الاستدلالات المركبة القائمة على التقابل بالتضاد :

القضايا المتضادة تختلف ، كما نعلم ، عن تلك المتناقضة ، فى أن القضيتين المتضادتين

على الرغم من أنهما لا تصدقان معاً ، إلا أنهما مع ذلك قد تكذبان معاً . ولنأخذ مثلا لذلك القضيتين التاليتين :

(ا = صفر) ، (س ⊆ ا)

فهما متضادان ، طالما أن صدق إحداهما يستلزم كذب الأخرى ، لكن كذب إحداهما لا يستلزم صدق الأخرى . ويمكن التعبير عن هذه الحالة من التضاد ، بالصيغة الرمزية التالية :

١ — (ا = صفر) ⊃ ~(س ⊆ ا) .

٢ — أو (س ⊆ ا) ⊃ ~(ا = صفر) .

لكننا ذكرنا من قبل أن الاستدلال المتبادل ينتهي بنا إلى معنى التكافؤ . فهل يمكن بناء على الصيغة الرمزية السابقة أن نعبر عن التضاد باستخدام التكافؤ ؟ للاجابة على هذا السؤال ، يجب أن نعرف أولا ما إذا كان من الممكن أن نعبر عن التضاد باستخدام الاستدلال المتبادل .

الواقع أن التضاد لا يصاغ رمزيا على أنه تكافؤ ، بل على أنه إستدلال غير تبادلي(١) . وذلك لأنه حق على الرغم من أن صدق إحدى القضيتين المتضادتين يستلزم كذب الأخرى ، فإن كذب إحداها لا يستلزم صدق الأخرى .

إذن فالاستدلال بين (ا = صفر) ، ~(س ⊆ ا) ، أو بين(س ⊆ ا)، ~ (ا = صفر) . ليس إستدلالا تبادليا ، بل هو استدلال ذو إتجاه واحد فقط (هو اتجاه الصدق) ، ومن ثم فإن هذه القضايا ليست بالقضايا المتكافئة . أى أن الاستدلالين التاليين إستدلالان خاطئان :

---

(١) non-reciprocal

١ — ـ(س ⊆ ا) ⊃ (ا = صفر)

٢ — ـ(ا = صفر) ⊃ (س ⊆ ا) .

وعلينا هنا أن نلاحظ فى هذا الصدد أن القضيتين الكليتين المختلفتين فى الكم مثل (كل ا هى ب) ، (لا ا هى ب) إذا ما فسرتا تفسيرا شرطيا (غير وجودى)(١) ، فلن نجد بينهما تقابلا من أى نوع ، وبشكل أكثر تخصصا ، لن نجد بينهما تقابلا بالتضاد . فهما قد تكذبان معاً — كما هو معروف من قاعدة التقابل — لكنهما قد تصدقان معاً كذلك ، إذا كانت الفئة ا فئة فارغة خالية من المصادقات . وعلى ذلك فحين تكون هاتان الفئتان ، وجوديتين ، أى تعبران عن وجود أعضاء فى الفئة ا ، يكون الاستدلالات التاليان صحيحين :

١ — (ا بَ = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ـ (ا ب = صفر) .

٢ — (ا ب = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ـ (ا بَ = صفر) .

ثانيا : الاستدلالات القائمة على الدخول تحت التضاد :

إن القضيتين الداخلتين تحت التضاد ، بالرغم من أنهما قد تصدقان معاً ، إلا أن كذبهما معاً مستحيل . وبعبارة أخرى ، فإننا لا نستطيع من صدق إحداهما أن نستنتج كذب الأخرى لكننا نستطيع من كذب إحداهما الاستدلال على صدق الأخرى .

ومن المعروف فى المنطق التقليدى أن الدخول تحت التضاد يكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين كيفا . إلا أننا نلاحظ فى منطق الفئات أن القضيتين (بعض ا

(١) Hypothetical (non-existential)

هى ب) ، (بعض ا ليس ب) لا ترتبطان بعلاقة الدخول تحت التضاد ، ما لم نفترض مقدما أن تكون الفئة ا فئة ذات أعضاء ، وفى مثل هذه الحالة يكون الاستدلالان التاليان صحيحين :

١ — [~(ا ب ≠ صفر) . ا ≠ صفر] ⊃ (ا بَ ≠ صفر)

٢ — [~(ا بَ ≠ صفر) . ا ≠ صفر] ⊃ (ا ب ≠ صفر)

أما لو بدأنا بصدق (ا ب ≠ صفر) ، فإن كذب (ا بَ ≠ صفر) لن يكون مؤكدا ، وكذا لو بدأنا بصدق (ا بَ ≠ صفر) ، فإن كذب (ا ب ≠ صفر) لن يكون مؤكدا ، وفى كلتا الحالتين لن يكون الاستدلال صحيحا .

ثالثا : الاستدلالات القائمة على التداخل :

إن الصياغة البديلة للاستدلال القائم على الدخول تحت التضاد ، يمكن أن نستفيد فيها من مبدأ التناقض . لأن نفى القضية الجزئية — الموجبة أو السالبة — يكافىء بالتناقض إثبات القضية الكلية — السالبة أو الموجبة — على الترتيب . وهكذا فإن نفى القضايا الجزئية فى الاستدلالين القائمين على الدخول تحت التضاد ، ينتهى بنا ، إذا وضعنا بدلا منهما ما يكافئهما ، إلى الاستدلالين الصحيحين التاليين :

١ — (ا ب = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ (ا بَ ≠ صفر) .

٢ — (ا بَ = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ (ا ب ≠ صفر) .

هكذا استطعنا بتحليل الاستدلالات القائمة على أساس من التقابل ، حينما تصاغ رمزياً ، أن نكشف عما هو مركب منها أو بسيط . فالاستدلالات المحتوية على تناقض هى استدلالات بسيطة ، أما الاستدلالات القائمة على التضاد أو الدخول تحت

التضاد أو التداخل ، فهى كما رأينا استدلالات مركبة ، لأن مقدماتها تعبيرات عطفية، تعطف مقدمتين أو أكثر .

أنواع الاستدلالات المركبة :

الاستدلالات المركبة تنقسم إلى قسمين أساسيين ، إستدلالات خالصة Pure وهى التى تتكون قضاياها من كم واحد ، واستدلالات مختلطة mixed وهى التى تحتوى على قضايا مختلفة الكم .

أولا : الاستدلالات المركبة الخالصة :(١)

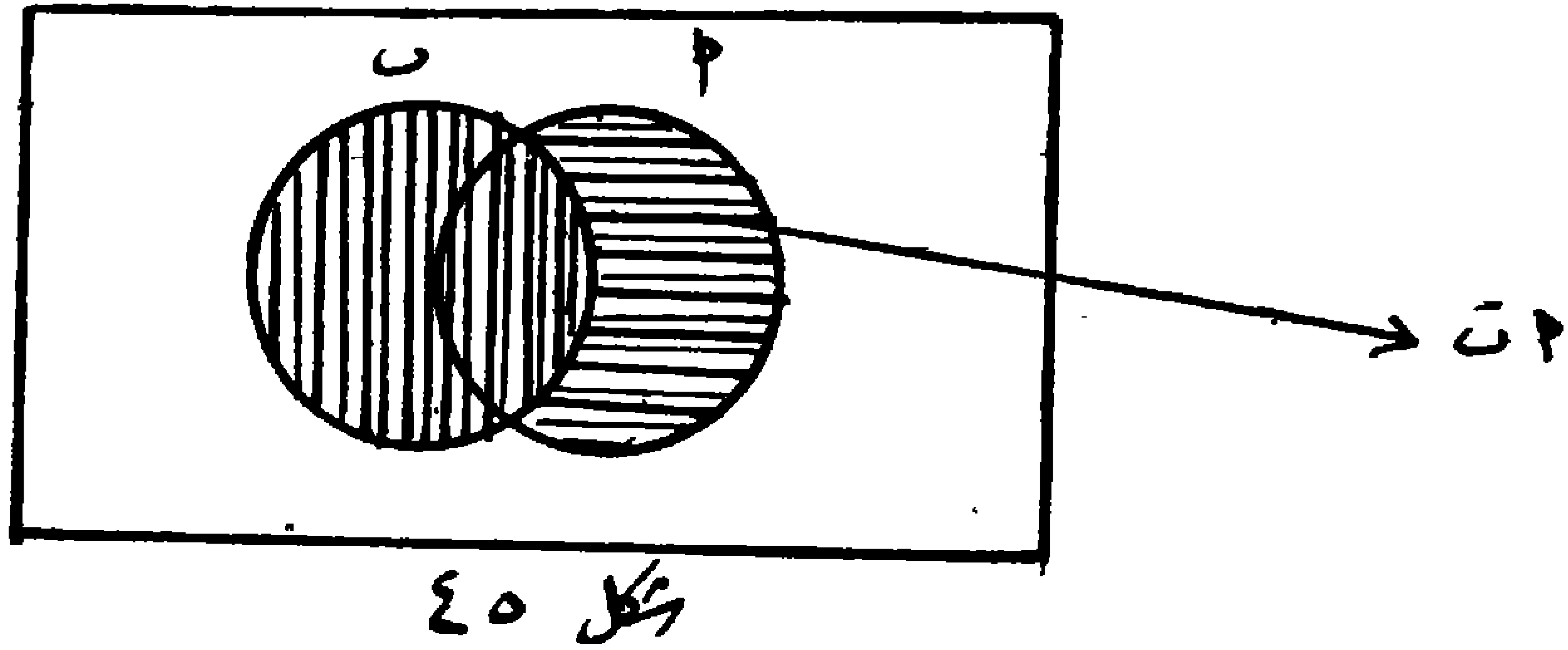
١ — لو كانت لدينا الصيغة الرمزية التالية لاستدلال خالص :

(ا بَ = صفر . ب = صفر) ⊃ ا = صفر .

وأردنا أن نتبين ما إذا كان الاستدلال صحيحاً أو غير صحيح ، باستخدام شكل ڤن ، فإننا نقوم بإدخال المقدمات الخاصة بالاستدلال على شكل ڤن ، فاذا كانت نتيجة الاستدلال بعد ذلك ، واضحة فى الشكل ، كان الاستدلال صحيحاً ، وإلا لم يكن كذلك . وذلك استناداً إلى ما عرفناه من قبل ، من أن الاستدلال الصحيح يكون هو ذلك الذى تلزم فيه النتيجة بالضرورة عن المقدمات . وفيما يلى الشكل الذى أدخلنا عليه المقدمتين فى الاستدلال السابق،والذى يكشف عن ضرورة لزوم النتيجة عن هاتين المقدمتين :

---

(١) Pure Compound Inferences.



شكل ٤٥

(وقد ظللنا فى الشكل السابق ، الفئتين الفارغتين على نحوين مختلفين ، إحداها وهى (ب) بالخطوط الرأسية ، والأخرى وهى (أ بَ) بالخطوط الأفقية ، للتمييز بينهما) . وهكذا نلاحظ من الشكل — لأول وهلة — إن تلك المقدمتين (ا بَ = صفر) ، (ب = صفر) ضروريتان للوصول إلى النتيجة (ا = صفر) وكذا أن النتيجة حاضرة وموجودة فى الشكل . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

هذا ويمكن البرهنة — بدون استخدام الشكل — على صحة هذا الاستدلال ، على النحو الآتى :

∵ ب = صفر (فرضاً) ∴ بَ ≠ صفر

، ∵ ا بَ = صفر (فرضاً)

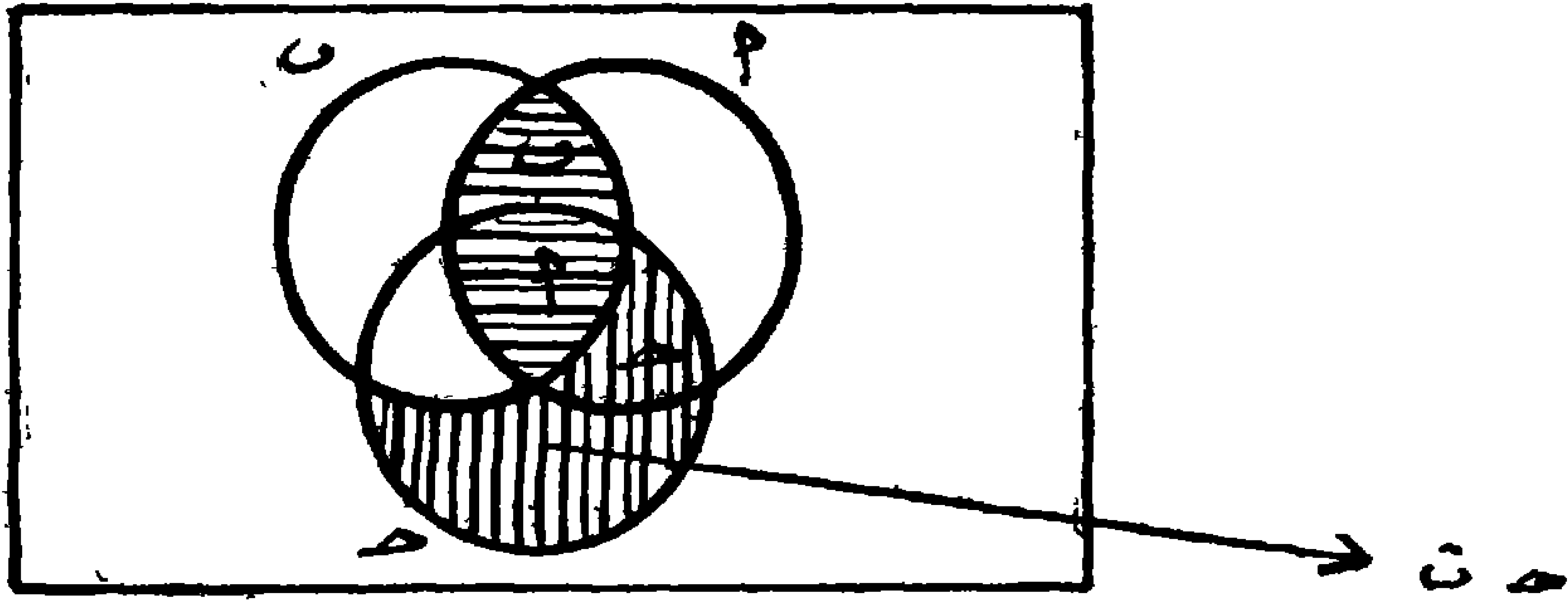
، ∵ بَ ≠ صفر

∴ ا = صفر وهو المطلوب . (وقد يكون هذا البرهان أكثر وضوحاً لو قلنا : إذا كانت (كل ا هى ب) ، وكانت ب = صفر ، كانت إذن ا = صفر ، طالما أن الفئة ا تنتمى إلى الفئة ب ، وأن الفئة ب = صفر .

٢ — لو كان لدينا استدلال يحتوى على ثلاث فئات لا فئتين فقط مثل :

(ا بَ = صفر . حـ بَ = صفر) ⊃ ا حـ = صفر

وأردنا أن نثبت من صحته باستخدام شكل ڤن ، فإننا نقوم بإدخال المقدمتين على الشكل فنحصل على :



شكل ٤٦

فى هذا الشـكل نلاحظ أن النتيجة وهى (ا حـ = صفر) حاضرة وموجودة بالفعل ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

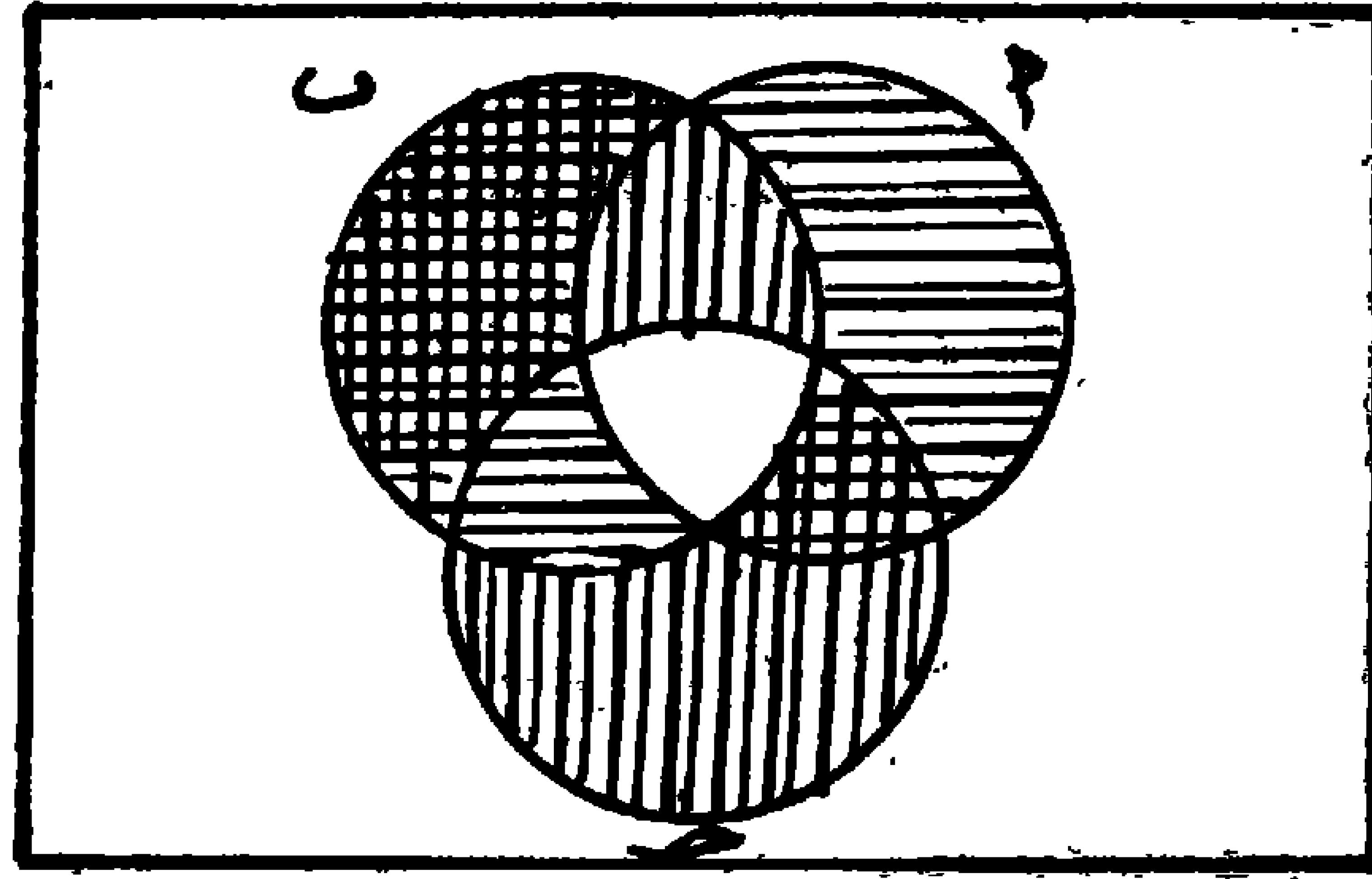
٣ — ولنأخذ مثلا آخر لاستدلال صحيح ، فيـه النتيجة لازمة عن المقدمتين :

(ا ⊂ ب . ب ⊂ حـ) ⊃ (ا ⊂ حـ)

وهذا ما يمـكن التعبير عنه بالصيغة الرمزية المـكافئة التالية :

(ا بَ = صفر . اَ ب = صفر . ب حَ = صفر . بَ حـ = صفر)

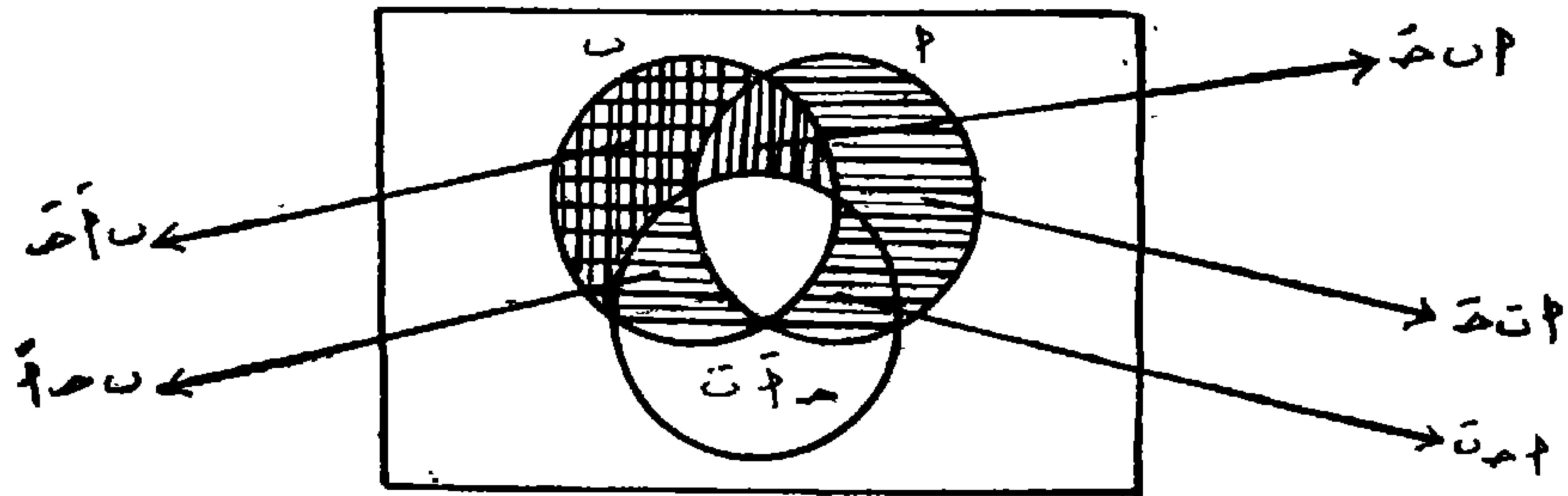
⊃ (ا حَ = صفر . اَ حـ = صفر) . كما يمـكن التعبير عنه بالشكل على النحو الآتى :



شكل ٤٧

٤ — فإذا فرضنا أن المقدمة الثانية فى المثال السابق (ب = ح) تفسر لا على أنها قضية تعبر عن تطابق بين الفئات(١) ، إنما على أنها قضية تعبر عن التضمن بين الفئات(٢) ، فستكون الصياغة الرمزية ، وكذا الشكل الخاص بهذا الاستدلال ، على النحو الآتى :

(أ = ب . ب حَ = صفر) ⊃ أ = ح



شكل ٤٨

نلاحظ فى هذه الحالة أن الاستدلال غير صحيح . لأنه كى تلزم النتيجة

---

(١) Coextensive - Class Proposition

(٢) Class - Inclusion Proposition

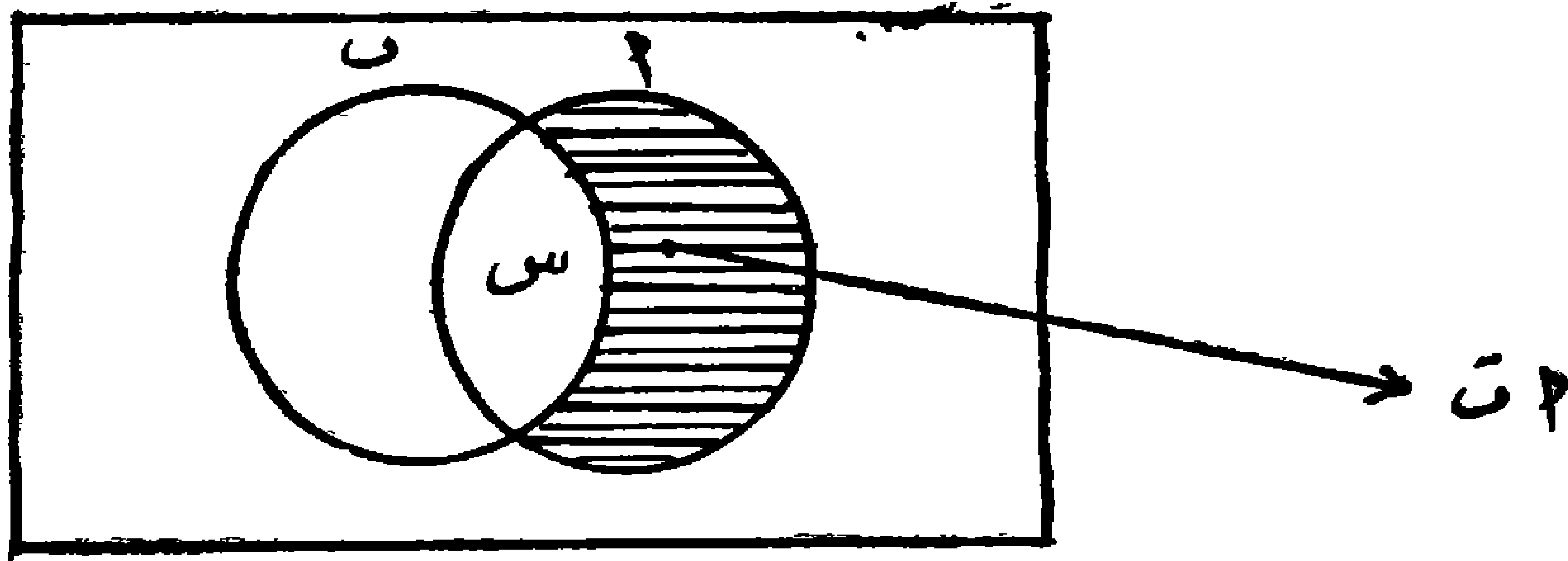
(ا = ح) عن المقـدمتين ، فلا بد وأن تـكون الفئتان ا حَ ، اَ ح معاً خاليتين من الأعضاء ، أو فارغتين (أو أن كلا منهما = صفر) . إلا أننا مع ذلك ، نرى فى الشـكل أن الفئة اَ ح ، فئة فارغة جزئياً فى المقدمتين (لأن ح اَ فى الشـكل السابق = ح اَ بَ + ح اَ ب ، ولأن الفئه ح اَ ب = صفر) فى حين أن الفئة الأولى (ح اَ بَ) من الممكن أن تحتوى على أعضاء طالما أننا لم نذكر عنها فى المقدمتين إنها مساوية للصفر . وهذا الإمكان أو الاحتمال وحده يجعل الاستدلال غير صحيح ، طالما أن مقدمتيه قد تـكونا صادقتين فى حين قد تـكون نتيجته كاذبة .

ثانياً : الاستدلالات المركبة المختلطة : (١)

ا — استدلالات تحتوى على قضايا مفردة ، مثل :

(س ⊂ ا . ا بَ = صفر) ⊃ س ⊂ ب

وللبرهنة على صحة هـذا الاستدلال نقوم بإدخال المقدمتين على شكل ڤن ، فنحصل على :



شكل ٤٩

من الشـكل السابق نلاحظ أن النتيجة حاضرة وموجودة ، وهى أن

(١) Mixed Compound Inferences.

(س ⊂ ب) . وعلى ذلك فالنتيجة قد لزمت عن المقدمتين حال إدخالهما على الشكل . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

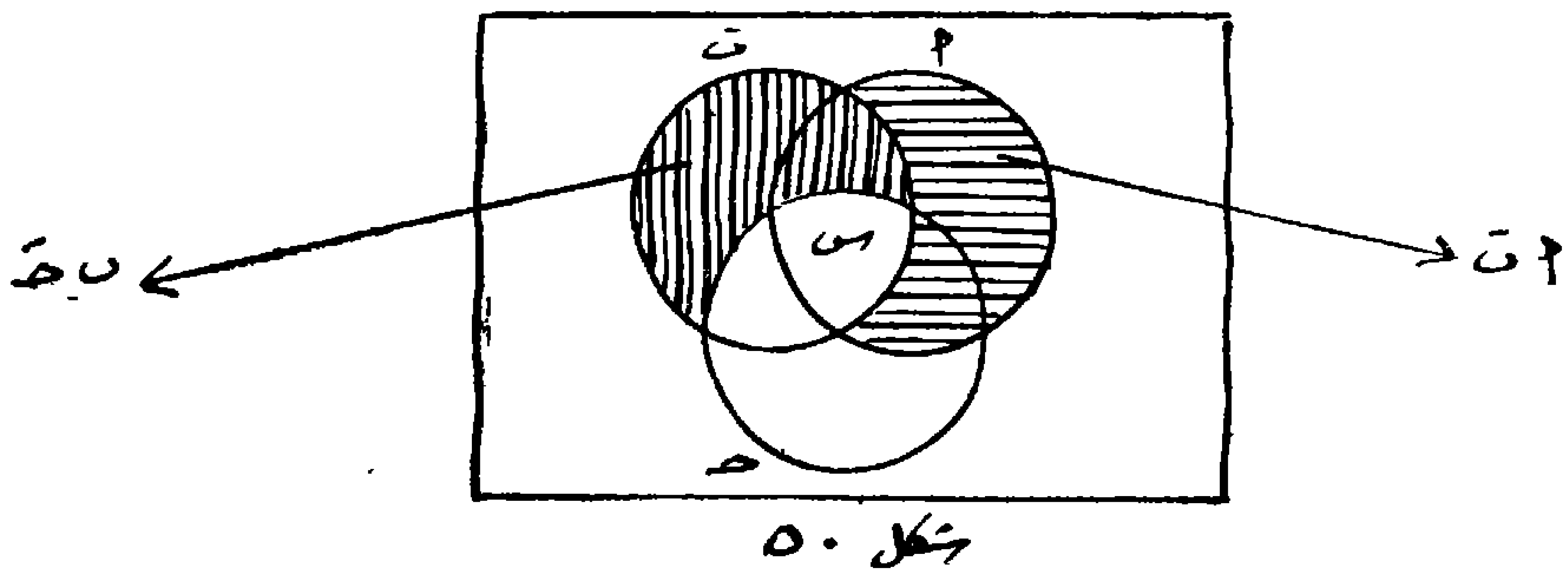
هذا ويمكن البرهنة بطريقة أخرى لو استخدمنا الصيغة التالية : [إذا كانت (س ⊂ ا) ، وكانت (كل ا هى ب) ، كانت إذن (س ⊂ ب)] . وتقرأة : إذا كانت س عضواً فى الفئة ا ، وكانت الفئة ا منتمية إلى الفئة ب ، كانت إذن س عضواً فى الفئة ب .

ملحوظة : علينا ، حين نقوم — فى حالة الاستدلالات المختلطه — بإدخال المقدمات على شكل فن ، أن نراعى إدخال القضية الكلية أولا . قبل إدخال القضية المفردة أو القضية الجزئية .

٢ — ولناخذ المثل التالى لاستدلال يتضمن ثلاث فئات :

(ا بَ = صفر . ب حَ = صفر . س ⊂ ا) ⊃ (س ⊂ ح)

فاذا أردنا أن نتبين صحة هذا الاستدلال ، فاننا نقوم بإدخال مقدماته شكل فن على النحو الآتى :



شكل ٥٠

فى هذه الحالة نلاحظ مباشرة حضور النتيجة (س ∈ ح) ووجودها فى الشكل ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

هذا ويمكن أن تتضح صحة الاستدلال إذا ترجمناه إلى صيغة أخرى هى : إذا كانت (كل ا هى ب) وكانت (كل ب هى ح) ، وإذا كانت س (∈ ا) ، كانت إذن (س ∈ ح) . وتقرأ :

إذا كانت الفئة ا تنتمى إلى ب ، وكانت الفئة ب تنتمى إلى الفئة ح ، وكانت س عضوا فى الفئة ا ، كانت إذن س ، عضوا فى الفئة ح بالضرورة .

(ب) استدلالات تحتـــوى على قضايا جزئية :

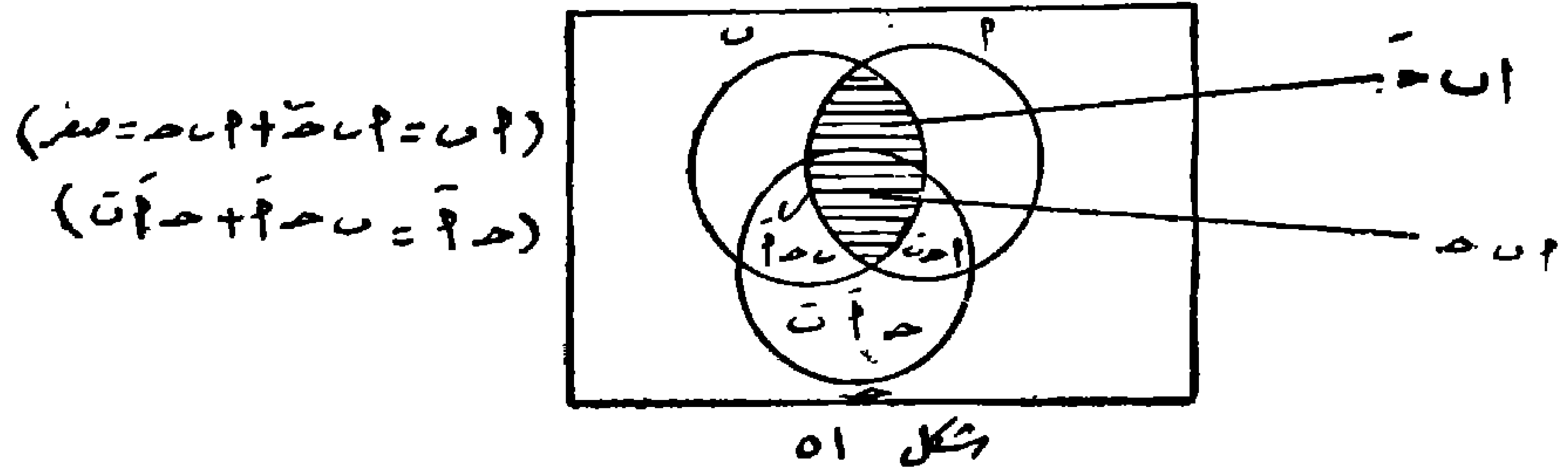
١ — لو أردنا أن نتبين مدى صحه الاستدلال التالى مثلا :

(ا ب = صفر . ب ح ≠ صفر) ⊃ ح اَ ≠ صفر

الواقع أن الصياغة الرمزية السابقة للاستدلال تـكشف عن صحته ، أى عن لزوم النتيجه عن المقدمتين . كما تتضح صحة هذا الاستدلال بصفة خاصة ، لو أعدنا صياغة الاستدلال على النحو الآتى : إذا كانت (لا ا هى ب) ، وكانت (بعض ب هى ح) ، كانت إذن (بعض ح ليس ا) .[1] كما تتضح صحة هذا الاستدلال كذلك من الشكل التالى :

---

(١) وهو قياس من الضرب Fresison من الشكل الرابع وقد وضعناه على شكل استدلال لزومى أو شرطى .


شكل ٥١

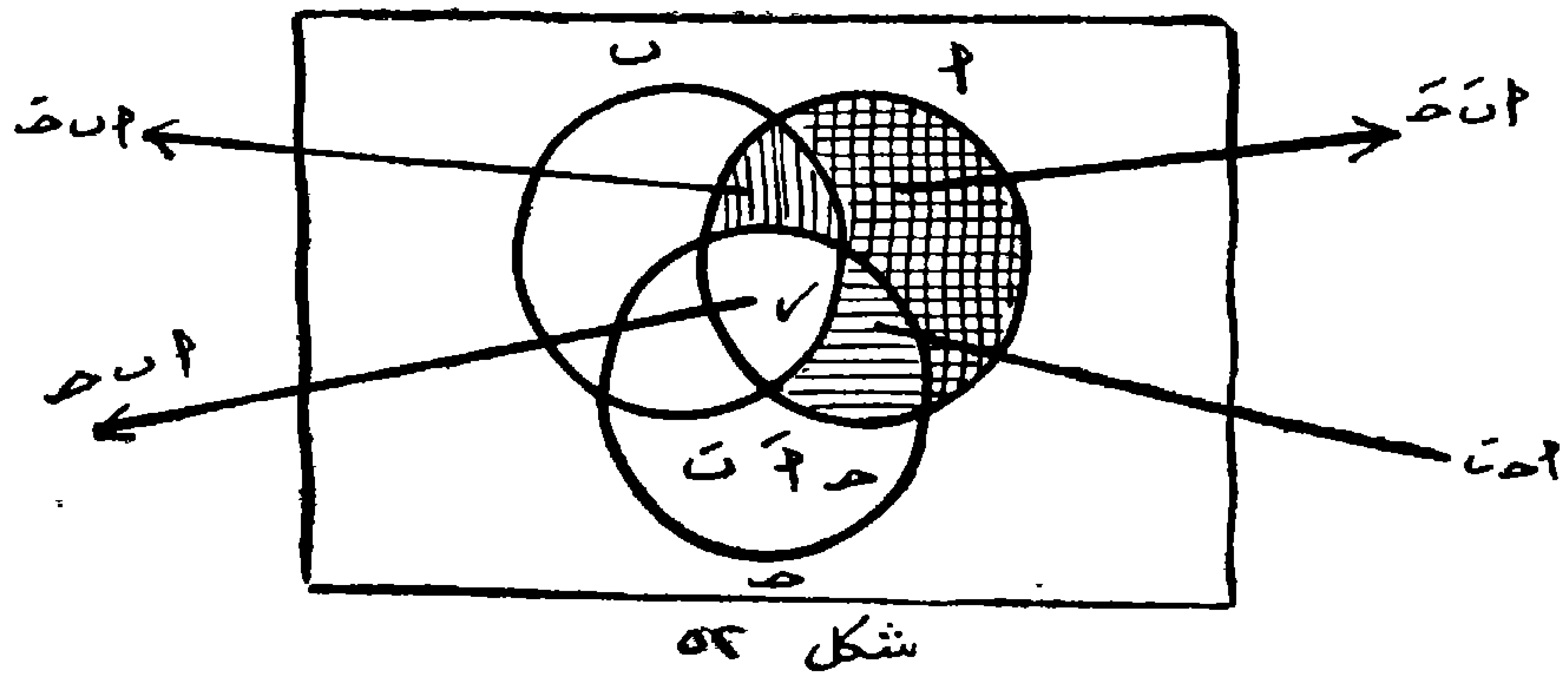
ويمكن توضيح ذلك الشكل على النحو الآتى :

أن (حـ اَ = ب حـ اَ + حـ اَ بَ) . وبما أن إحدى الفئتين التى تتكون منهما الفئة حـ اَ ، وهى الفئة (ب حـ اَ) لا تساوى الصفر ، إذن فمن الأولى أن تكون الفئة حـ اَ ، هى بدورها ، لا تساوى الصفر ، وهو المطلوب .

٢ — ولنفرض أن لدينا الاستدلال التالى :

(ا بَ = صفر . ا حـَ = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ا ب ≠ صفر

فإذا ما أردنا أن نتثبت من صحته ، قمنا بإدخال مقدماته على شكل فن ، لكى نرى ما إذا كانت النتيجة حاضرة فى الشكل أم لا . وذلك على النحو الآتى :


شكل ٥٢

ويمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلى :

∵ ا بَ = صفر (فرضاً)

، ∵ ا حَ = صفر (فرضاً)

∴ ينتج عن هذا (فى الشكل) أن: ا ب حَ = صفر. وأن: ا ح بَ = صفر

، ∵ ا ≠ صفر (فرضا)

، ∵ ا = ا بَ حَ + ا ح بَ + ا ب حَ + ا ب ح

، ∵ كلا من الفئات الثلاث الأولى التى تتكون منها الفئه ا ، هى مساوية للصفر .

∴ فالجزء الباقي منها ، وهو (ا ب ح) لا يساوى الصفر .

∴ ا ب ح ≠ صفر .

، ∵ ا ب = ا ب حَ + ا ب ح

، ∵ إحدى هاتين الفئتين ، وهى (ا ب ح) ≠ صفر

∴ فان ا ب ≠ صفر وهو المطلوب

ثانياً : الاختبار الرمزى الموسع للاستدلالات الخاصة بقضايا الفئات (١)

وهى الطريقة التى نلجأ إليها حين يتعذر علينا ، أو حين نجد صعوبة كبيرة فى

---

(١) Symbolic Expansion Test.

معرفة صحة الاستدلالات باستخدام شكل فن . وسنحاول فيما يلى تطبيق هذه الطريقة بالنسبة لنوعى الاستدلالات الخالصة والمختلطة ، وذلك كما يلى : —

(ا) الاستدلالات الخالصة :

١ — لنفرض أن لدينا إستدلالا مركبا خالصا ، يأخذ الصيغة التالية : —

(كل ا هى ب ، كل ب هي حـ . إذن فـكل ا هى حـ)

التى يمكن التعبير عنها رمزيا على النحو الآتى : —

(ا بَ = صفر . ب حـَ = صفر) ⊃ ا حـَ = صفر .

بتاملنا هذا الاستدلال ، نلاحظ أنه يحتوى على ثلاثة حدود خاصة بالفئات هى: ا ، ب ، حـ وإن واحدا من هذه الحدود محذوف فى كل مقدمة من المقدمتين،وكذا فى النتيجة . وبما أننا نعرف أن نتيجة الاستدلال الصحيح تـكون لازمة بالضرورة عما تخبر به المقدمات ، فيبدو أننا لو وسعنا كل قضية من هذه القضايا الثلاث لـكى تحتوى على الحد المحذوف ، لاستطعنا أن نقارن بسهولة أكثر بين المقدمتين والنتيجة ومن ثم نستطيع تحديد ما إذا كانت المقدمات تـكفى لإنتاج النتيجة أو ما إذا كانت النتيجة تلزم بالضرورة عن المقدمات .

وفيما يلى الطريقة التى سوف نتبعها ، لإدخال أى حد على العبارة الرمزية لقضية ما ، بدون أن نغير من معناها :

أولا علينا أن نتذكر القانون القائل بان : (ا × ١ = ا) وهو الذى يفيد أن أية فئة مثل ا ، تـكون متطابقة مع حاصل ضرب الفئة ذاتها فى الفئة الشاملة

(أو عالم المقال) : فاذا ما طبقنا ذلك على الاستدلال الذى نحن بصدده ، فاننا ننتهى إلى أن المقدمة الأولى فى الاستدلال وهى (ا بَ = صفر) ، يمكن أن تصبح (ا بَ × ١ = صفر) ، طالما أن (ا بَ × ١ = ا بَ) ، بدون أن يتغير معناها . وبما أن الفئة الشاملة — تكون مطابقة لأية فئة والفئة المكملة لها ، وبما أننا نود إدخال الفئة حـ على المقدمة الأولى ، وبما أن (ا = حـ + حـَ) ، فاننا نكتب المقدمة الأولى كما يلى : —

[ا بَ (حـ + حـَ) = صفر]

وكخطوة أخيرة ، فاننا نقوم بفك الأقواس ، أو بعبارة أخرى نقوم بتطبيق أحد قوانين الاستغراق، فنحصل على ما يمكن أن نسميه بالصيغة الموسعة expanded للمقدمة الأولى وهى :

ا بَ حـ + ا بَ حـَ = صفر .

والواقع أن معنى هذه الصيغة الموسعة ، هو نفسه معنى الصيغة الأصلية (ا بَ = صفر) ، والفرق بينهما فى الصياغة هو مجرد إدخال الفئة حـ فى الصيغة الجديدة .

الآن ، هل أصبح فى استطاعتنا تحديد ما إذا كان الاستدلال صحيحا أم لا ؟ لا ، فنحن لا زلنا غير قادرين على تحديد صحة الاستدلال ، حتى يتم توسيع المقدمة الأخرى أيضا . ويمكن توسيع المقدمة الثانية ، خطوة،خطوة،بادخال الحد المحذوف فيها وهو (ا) ، بنفس الطريقة السابقة ، وذلك كما يلى : —

١ — ب حَ = صفر   (المقدمة الثانية)

٢ — ب حَ × ١ = صفر   [وذلك بوضع (ب حَ) بدلا من (ا) في (ا × ١ = ا)]

٣ — ب حَ (ا + اَ) = صفر   (بما أن ١ = ا + اَ ، قانون الوسط المرفوع)

٤ — ب حَ ا + ب حَ اَ = صفر   [بوضع (ب حَ) بدلا من (ا) ، (ا) بدلا من (ب) ، (اَ) بدلا من (حـ) في قانون الاستغراق التالى : —

ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ]

٥ — ا ب حَ + اَ ب حَ = صفر   (باستخدام قانون التبادل) .

والواقع أن اتخاذ الخطوة الأخيرة يساعدنا كثيرا في ترتيب الحدود أو المتغيرات على نحو يسمح بعقد المقارنة بين هذه المقدمة والمقدمة الأولى .

بقى بعد ذلك توسيع النتيجة أيضا ، لكى تكون محتوية على الحد المحذوف وهو (ب) ، كما يلى : —

١ — ا حَ = صفر   (النتيجة)

٢ — ا حَ × ١ = صفر .

٣ — ا حَ (ب + بَ) = صفر .   (بما أن ١ = ب + بَ)

٤ — ا حَ ب + ا حَ بَ = صفر .

٥ — ا ب حَ + ا بَ حَ = صفر .

هكذا نكون قد وسعنا جميع قضايا الاستدلال السابق ، بحيث أصبحت جميعا شاملة لكل المتغيرات الواردة في الاستدلال .

الخطوة التالية لهذا ، هي أن نختبر الاستدلال كله ، وذلك بان نشطب كل فئة من الفئات الواردة في النتيجة ، إذا كانت قد وردت من قبل في المقدمات على أنها فئة فارغة لا أعضاء لها ، أو مساوية للصفر . وهكذا يكون الاستدلال الذى عبرنا عنه رمزيا هنا استدلالا صحيحا ، فقط إذا كانت جميع الفئات الواردة فى نتيجة ، فئات فارغة ، أى فئات تم حذفها ، طالما إن المقدمتين أثبتتا أنها فارغة . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى : —

[(ابَحـ + ابَحـَ = صفر) . (ابحـَ + أَبحـَ = صفر)] ⊃
(ا/بحـَ + ابَ/حـَ = صفر)

الآن نرى أن الاستدلال صحيح ، لأن المقدمة الأولى ، تجعل الفئة (ابَحـَ) فئة فارغة ، أو تقرر أنها كذلك ، كما أن للمقدمة الثانية ، تقرر أن الفئة (ابحـَ) فئة فارغة أيضا . وهكذا فان المقدمتين معا ، قد أحالتا الفئة الواردة فى النتيجة بأكملها إلى فئة فارغة ، ومن ثم يمكننا أن نقول عن الاستدلال انه صحيح .

والواقع أننا لن نحتاج ، بعد قليل من المران والتدريب (إلى ذكر كل هذه الخطوات السابقة ، إذ سيكون من الواضح لدينا أن أى حاصل ضرب مثل(ا × ب) يمكن توسيعه مباشرة لكى يحتوى على أية فئة أخرى (مثل حـ) عن طريق إضافة ابحـ + ابحـَ ، وذلك كما يلى : (ابحـ + ابحـَ) .

٢ — ولنأخذ لذلك المثل الآتى : —

(كل ا هى ب ، لا حـ هى ا . إذن لا حـ هى ب)

فاذا عبرنا رمزيا عن الاستدلال ، لحصلنا على :

(ا بَ = صفر . حـ ا = صفر) ⊃ حـ ب = صفر

وإذا ما وسعناه بطريقة مباشرة ، لحصلنا على :

[(ا بَ حـ + ا بَ حـَ = صفر) . (حـ ا ب + حـ ا بَ = صفر)] ⊃ (حـ ا ب + حـ ب اَ = صفر)

فإذا ما أعدنا ترتيب المتغيرات فى المقدمة الثانية والنتيجة لحصلنا على :

[(ا بَ حـ + ا بَ حـَ = صفر) . (ا ب حـ + ا بَ حـ = صفر)] ⊃ (ا ب حـ + اَ ب حـ = صفر)

الآن بعد توسيع الصيغة الرمزية للاستدلال ، هل استطعنا أن نتبين صحته ؟

الواقع أن الاختبار الدقيق لمثل هذا الاستدلال يظهر أنه غير صحيح . حقا إن الفئة (ا ب حـ) الواردة فى النتيجة قد وردت فى المقدمة الثانية على أنها فئة فارغة . إلا أن الفئة المتبقية فى النتيجة لم يرد ذكرها فى المقدمتين . وحيث اننا لا نستطيع أن نعرف من المقدمتين ما إذا كانت هذه الفئة ذات أعضاء أم لا ، فان النتيجة بهذا الشكل لا تلزم عن المقدمتين ، ومن ثم فالاستدلال غير صحيح .

(ب) الاستدلالات المختلطة :

١ — لنأخذ المثال الآتى ، وهو إستدلال يحتوى على قضايا كلية وجزئية معا .

(كل ا هى ب . بعض حـ هى ا . إذن بعض حـ هى ب)

فإذا ما عبرنا عن هذا الاستدلال رمزيا لحصلنا على . —

(ا بَ = صفر . حـ ا ≠ صفر) ⊃ حـ ب ≠ صفر

فإذا ما وسعناه بطريقة مباشرة لحصلنا على : —

[(ا بَ حـ + ا بَ حـَ = صفر) . (حـ ا ب + حـ ا بَ ≠ صفر)] ⊃ (حـ ب ا + حـ ب اَ ≠ صفر)

فاذا رتبنا المتغيرات فيه حصلنا على : —

[(ا بَ حـ + ا بَ حـَ = صفر) . (ا ب حـ + ا بَ/ حـ ≠ صفر)] ⊃ (ا ب حـ + اَ ب حـ ≠ صفر) .

ولقد شطبنا الفئة (ا بَ حـ) الواردة فى المقدمة الجزئية ، وذلك لإظهار أنهـــا واحدة من الفئات التى أثبتت المقدمة الأولى الـكلية أنها فارغة أو مساوية للصفر . وهذا يعنى أن الفئة الأولى فى المقدمة الثانية (ا ب حـ) لا تـكون مساوية للصفر ، أو ليست فارغة ، أى ذات أعضاء . وبما أن هذه الفئة ذات أعضاء فى المقدمة الثانية فهى كذلك ذات أعضاء فى النتيجة . ومن ثم ينتج عن ذلك ، بطريقة أكثر شمولا أن تـكون الفئة (ا ب حـ + اَ ب حـ) هى فئة ذات أعضـاء . وهكذا فان النتيجة تـكون قد لزمت لزوما ضروريا عن المقدمتين ، ومن ثم فالاستدلال صحيح

٢ — لو كان لدينا الاستدلال المختلط التالى الذى يحتوى على قضايا مفردة :

(لا ا هى ب ، س هى ا . إذن س ليست هى ب) .

نلاحظ أن مثل هذا الاستدلال ، لا يتضمن إلا فئتين فقط هما ا ، ب . وبما أن المقدمة الكلية تشير بالفعل إلى هاتين الفئتين ، فإننا لن نحتاج إلا إلى توسيع المقدمة المفردة فقط ، وكذلك النتيجة . ومن ثم يكون تعبيرنا الرمزى عن الاستدلال كما يلى :

(ا ب = صفر . س ⊂ ا) ⊃ س ⊂ بَ .

كما تكون صيغته الموسعة على النحو الآتى :

[(ا ب = صفر) . س ⊂ (ا ب + ا بَ)] ⊃ س ⊂ (ا بَ + اَ بَ)

فالفئة ا فى المقدمة المفردة فى هذا الاستدلال ، تم توسيعها لكى تحتوى على ب ، كما أن الفئة بَ فى النتيجة قد تم توسيعها لكى تشتمل على ا . وبما أن المقدمة الكلية تخبرنا عن الفئة (ا ب) أنها فئة فارغة ، فإننا نشطبها (نحذفها) من المقدمة المفردة ، ومن ثم يصبح العضو الفرد (س) متضمنا فى الفئة ا بَ (طالما أن ا ب = صفر) .

لكن إذا كان (س) منتميا إلى الفئة ا بَ ، فهو سيكون كذلك منتميا إلى الفئة الأكثر شمولا وهى (ا بَ + اَ بَ) . ويترتب على ذلك لزوم النتيجة عن المقدمتين ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

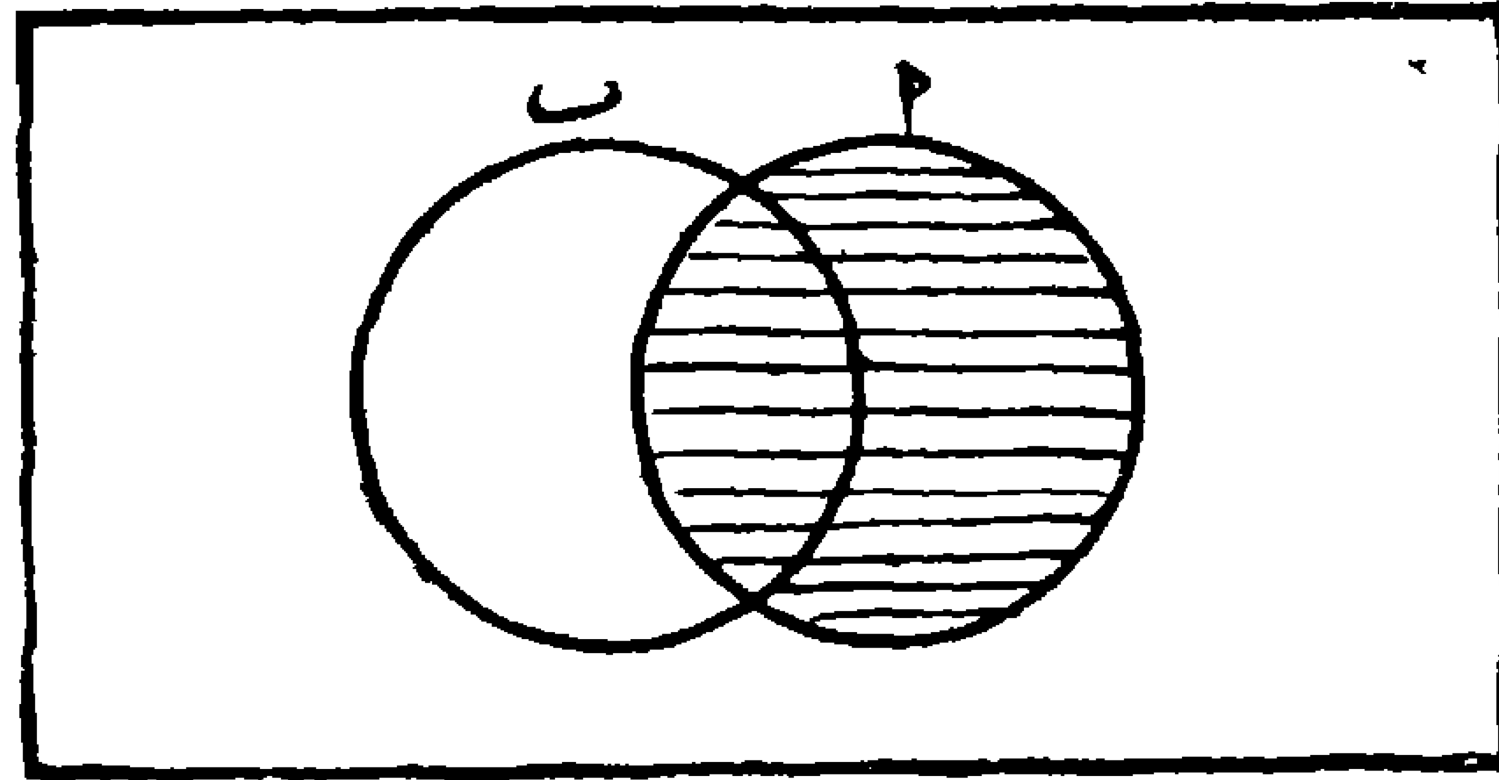
إختصار الاختبار الرمزى الموسع :

نحن عادة ما نقوم بتوسيع جميع القضايا الخاصة بالاستدلال فى حالة الاختبار الرمزى الموسع (باستثناء المثال الأخير) ، مع أننا قد لا نكون فى حاجة إلى توسيع

جميع القضايا ، بل قضية واحدة أو قضيتين . ومن ثم فإننا نلجأ أحيانا إلى إختصار هذه الطريقة الموسعة ، وذلك بالاقتصار على توسيع القضايا التي نحتاج إلى توسيعها فقط . وسنستخدم في هذه الحالة ، بعض أو كل القوانين الثلاثة التالية :

(١) ا = صفر ⊃ ا ب = صفر

ويمكن إظهار صحة هذا الاستدلال بشكل فن كما يلي :

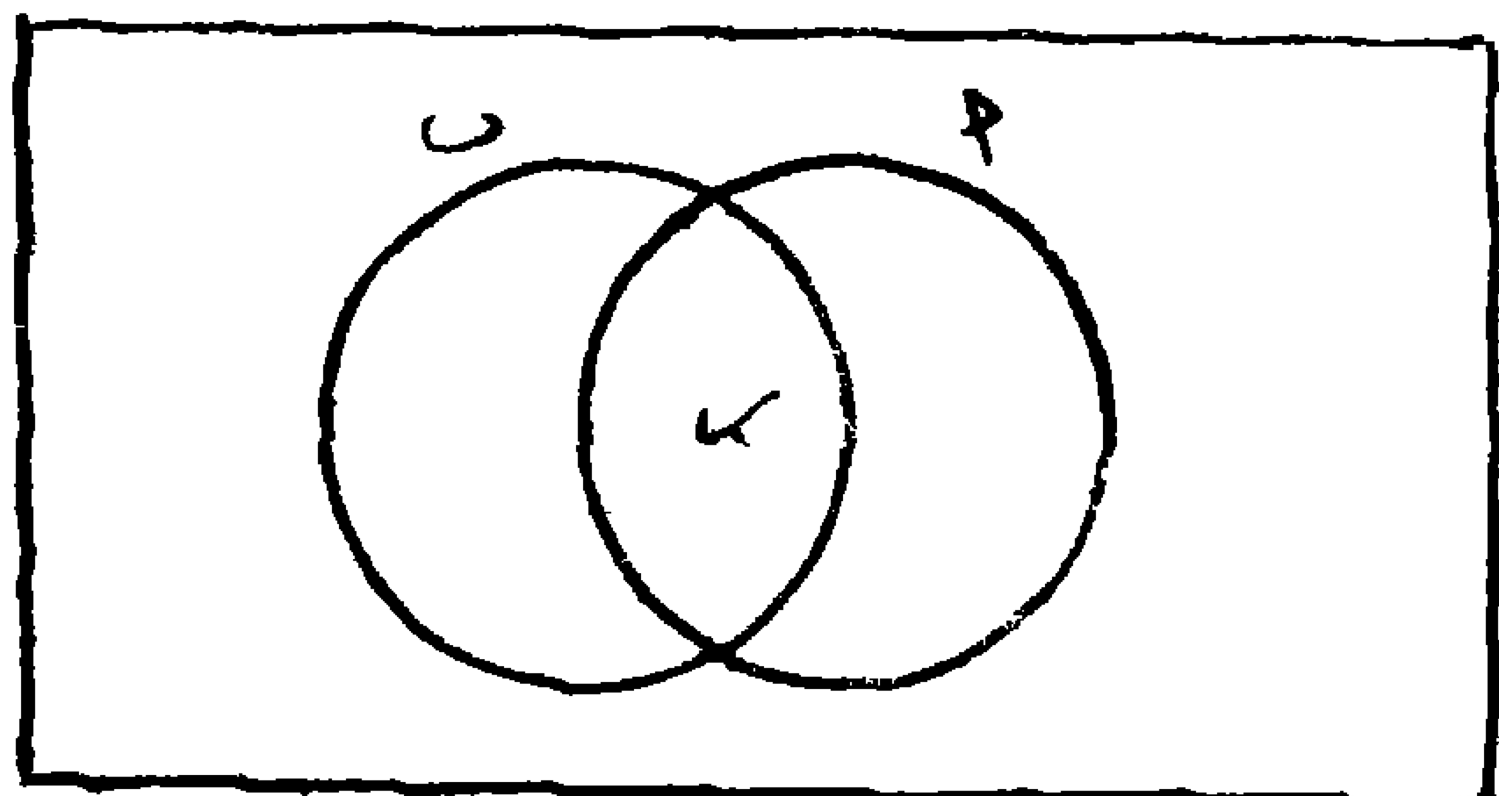


شكل ٥٣

(٢) ا ب ≠ صفر ⊃ ا ≠ صفر .

(وكذلك : ا ب ≠ صفر ⊃ ب ≠ صفر) ، لأنه لو كانت ا أو ب = صفر لكان حاصل ضرب إحداهما في الأخرى = صفر دائما .

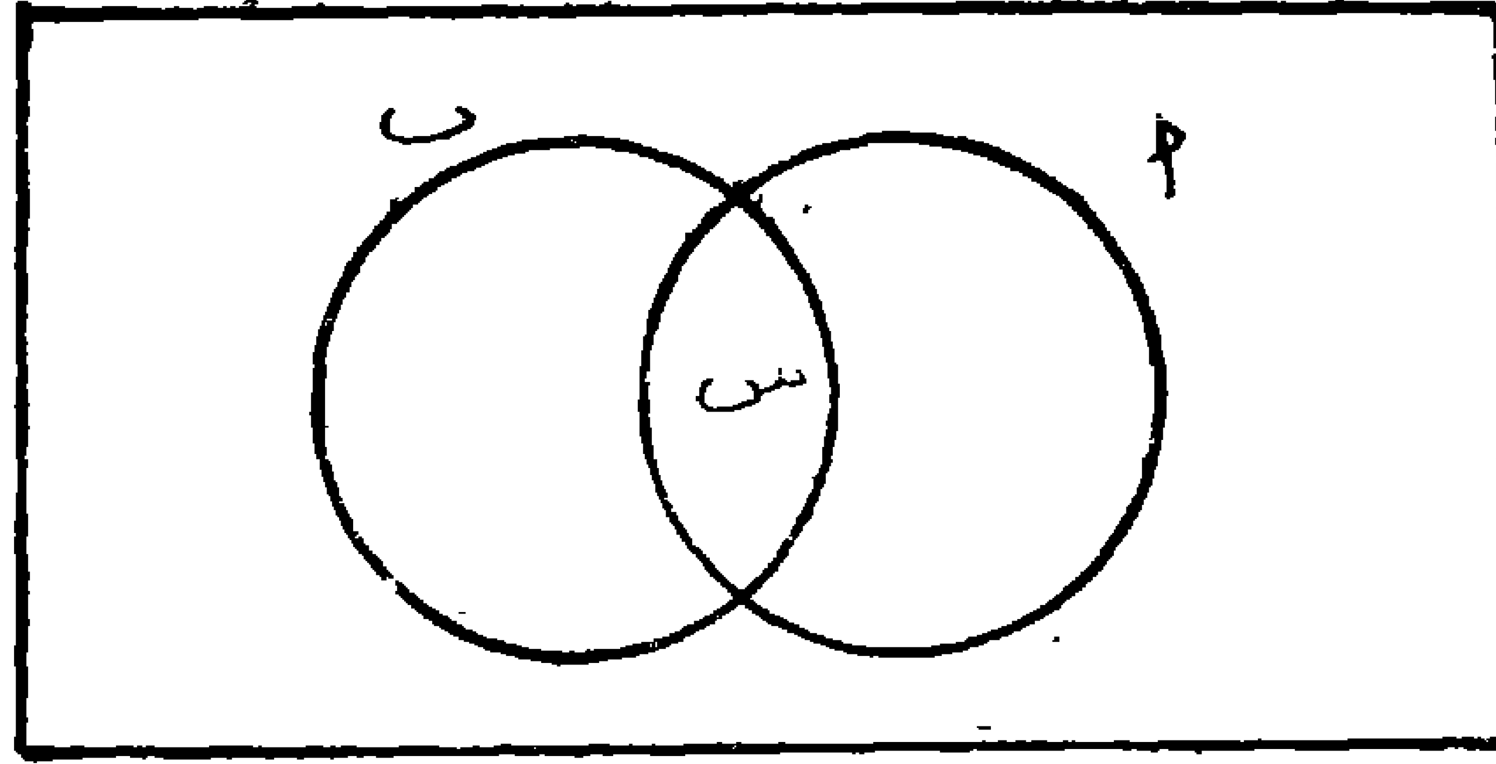
وهذا ما يتضح من الشكل الآتي : —



شكل ٥٤

(٣) س ⊆ ا ب : ⊃ : س ⊆ ا (وكذلك : س ⊆ ا ب : ⊃ : س ⊆ ب) .

وهذا ما تتضح صحته من الشكل التالى :



شكل ٥٥

وسنطبق فيما يلى هذه الطريقة المختصرة بالنسبة للاستدلالات الخالصة والمختلطة ، كما يلى :

(ا) الاستدلالات الخالصة :

١ — أن الاستدلال الكلى الخالص ، يمكن اختباره — لو أدخلنا فى اعتبارنا القانون الأول من القوانين السابقة ، بتوسيع النتيجة فقط . وسنأخذ لذلك مثلا الاستدلال التالى :

(كل ا هى ب ، وكل ب هى حـ . إذن فكل ا هى حـ)

الذى نعبر عنه رمزيا كما يلى :

(ا بَ = صفر . ب حَ = صفر) ⊃ ا حَ = صفر .

ثم نقوم بتوسيع النتيجة فيه على النحو الآتى :

(ا بَ = صفر . ب حَ = صفر) ⊃ (ا ب حَ + ا بَ حَ = صفر)

وبما أننا نعرف أن الفئة (ا ب حـَ) الواردة فى النتيجة هى جزء من الفئة (ب حـَ) التى تقول المقدمة الثانية أنها مساوية للصفر . وبما أننا نعرف أن الفئة (ا بَ حـَ) الواردة فى النتيجة هى جزء من الفئة (ا بَ) التى تقول المقدمة الأولى أنها مساوية للصفر . وبما أننا نعرف كذلك أن أى جزء من فئة فارغة ، يكون هو أيضا فارغا مساويا للصفر . فإننا نستطيع حذف الفئتين الواردتين فى النتيجة بناء على ما تقرره المقدمات من أنهما مساويتان للصفر . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — ولنأخذ المثل التالى ، الذى يتضح من تطبيق هذه الطريقة المختصرة ، أنه استدلال غير صحيح :

(كل ا هى ب ، كل حـ هى ب . إذن كل حـ هى ا)

الذى نعبر عنه رمزيا كما يلى :

(ا بَ = صفر . حـ بَ = صفر) ⊃ حـ اَ = صفر .

ثم نقوم بتوسيع نتيجة الاستدلال ، فنحصل على :

(ا بَ = صفر . حـ بَ = صفر) ⊃ حـ اَ ب + حـ اَ بَ = صفر

ثم نقوم بترتيب المتغيرات فى الصيغة السابقة ، فنحصل على : —

(ا بَ = صفر . بَ حـ = صفر) ⊃ اَ ب حـ + اَ بَ حـ = صفر

فى هذه الصيغة الأخيرة نلاحظ أن ما تخبرنا به المقدمه الثانية ، هو أن (بَ حـ) فئة مساوية للصفر ، أو فارغة . ومن ثم فإننا نستطيع حذف الفئة (اَ بَ حـ) فى النتيجة طالما أن الفئة الأخيرة جزء من الفئة (بَ حـ) المساوية للصفر . أما بالنسبة للجزء الثانى من النتيجة وهى الفئة (اَ ب حـ) ، فإننا لا نجد من بين الفئات الواردة فى المقدمتين ما يثبت أنها مساوية للصفر . ومن ثم فالنتيجة لا تلزم بالضرورة عن المقدمات ومن ثم فالاستدلال صحيح .

ب — الاستدلالات المختلطة :

أما فى حالة الإستدلالات المختلطة ، فإننا فى الطريقة المختصرة لا نحتاج إلا إلى توسيع المقدمة الجزئية أو للقدمة للفودة فقط · وهذا ما يتضح من الأمثلة التالية :

١ — لنفوض أن لدينا الإستدلال الفود التالى ·

(كل ا هى ب ، س هى ا · إذن س هى ب)

وأردنا أن نتثبت من صحته بإستخدام الطريقة المختصرة ، فإننا نقوم بصياغته رمزيا كما يلي : —

(ا بَ = صفر . س ∈ ا) ⊃ س ∈ ب .

ثم تقوم بتوسيع للقدمة للفردة فيه ، فنحصل على :

(ا بَ = صفر . س ∈ (اب + ا بَ) ⊃ س ∈ ب .

يلاحظ فى هذه القضية الموسعة أن المقدمة الكبرى (ا بَ = صفر) تثبت أن الفئة (ا بَ) فئة فارغة ، ومن ثم فإننا نشطبها أو نحذفها من المقدمة الموسعة طالما هى مساوية للصفر . وينتج عن ذلك أن العضو المفرد (س) يجب أن يكون متضمناً فى الفئة (ا ب) . وإذا كانت (س) عضواً فى الفئة (ا ب) ، فانها تكون كذلك إذن — (بناء على القانون ٣ سالف الذكر الذى ينص على أن : س ∈ ا ب : ⊃ : س ∈ ا أو س ∈ ب) عضوا فى أية فئة مثل ب أو ا ، التى تتضمن اب ، ولهذا فالنتيجة تكون قد لزمت بطريقة صحيحة عن المقدمتين ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — ولنأخذ كذلك مثلا لذلك الإستدلال الجزئى التالى :

(لا ا هى ب . بعض حـ هى ا . إذن بعض حـ ليست ب)

مرة أخرى ، فاننا نرمز لهذا الإستدلال كما يلى : —

(ا ب = صفر . حـ ا ≠ صفر) ⊃ حـ بَ ≠ صفر

ثم نقوم بتوسيع المقدمة التي تثبت عضوية الأفراد في الفئة (أي المقدمة الجزئية) وهي المقدمة الثانية ، كما يلي :

[ا ب = صفر . (حـ ا ب + حـ ا بَ ≠ صفر)] (⊃ حـ بَ ≠ صفر

ثم نقوم بترتيب المتغيرات فنحصل على : —

[ا ب = صفر . (ا ب حـ + ا بَ حـ ≠ صفر)] (⊃ بَ حـ ≠ صفر .

فإذا كانت (ا ب) فئة فارغة ، كانت إذن (ا ب حـ) — التي هي من الفئة (ا ب) فئة فارغة أيضا . وهذا يعني أن الفئة (ا بَ حـ) فئة ذات أعضاء ، أو ليست مساوية للصفر ، وهي تلك الصفة المتضمنة في الفئة (بَ حـ) وهكذا : إذا كانت (ا بَ حـ) فئة ذات أعضاء ، فكذلك الفئة (بَ حـ). ومن ثم فالإستدلال صحيح.

٣ — والواقع أن فائدة إستخدام الطريقة المختصرة للاختبار الرمزي الموسع ، تتضح بصفة خاصة في حالة الإستدلالات المختلفة التي تلزم فيها نتيجة جزئية عن مقدمتين أو أكثر من المقدمات الكلية . ولنأخذ لذلك مثلا الاستدلال التالي :

(كل ا هي ب . لا ا هي حـ . إذن بعض ب ليس حـ)

ولنعبر عن ذلك الاستدلال تعبيراً رمزيا كما يلي :

(ا بَ = صفر . ا حـ = صفر) (⊃ ب حـَ ≠ صفر .

كيف يمكن في هذه الحالة توسيع الاستدلال بطريقة مختصرة ؟ .

إننا نعرف أن النتيجة الجزئية لا يمكن إستنتاجها من المقدمات الكلية ، إلا إذا كانت إحدى المقدمتين على الأقل ، قضية وجودية . فاذا افترضنا مثلا أن ا فئة ذات أعضاء ، أصبحت الصيغة الرمزية الصحيحة للاستدلال السابق على النحو الآتي : —

(ا بَ = صفر . ا حـ = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ب حـَ ≠ صفر .

الآن يمكن أن نطبق الطريقة المختصرة ، وذلك بتوسيع المقدمة الجزئية أى الدالة على وجود أفراد فى فئة ما . وعلى ذلك علينا الآن توسيع المقدمة الثالثة الجديدة وهى : (ا ≠ صفر) .

ولكن كيف نقوم بتوسيعها ؟ إن الصعوبة التى نصادفها فى حالة توسيع (ا ≠ صفر) هى كيف نقوم بإدخال الفئتين المحذوفتين (ب ، حـ) عليها ؟

يمكننا أن نقوم بهذا التوسيع ، لو اتبعنا الخطوات التالية : —

١ — ا ≠ صفر (فرضا فى المقدمات)

٢ — ا × ١ ≠ صفر (طالما أن ا × ١ = ا)

٣ — ا (ب + بَ) ≠ صفر (طالما أن ١ = ب + بَ)

٤ — ا ب + ا بَ ≠ صفر (بتطبيق قانون الاستغراق)

٥ — (ا ب × ١) + (ا بَ × ١) ≠ صفر .

ونلاحظ هنا أن كلا من حاصلى الضرب المنطقيين ا ب ، ا بَ ، يجب توسيعه حتى يشتمل على الفئة حـ ولذا نحصل على :

٦ — [ا ب (حـ + حـَ)] + [ا بَ (حـ + حـَ)] ≠ صفر ، (لأن ١ = حـ + حـَ) .

٧ — ا ب حـ + ا ب حـَ + ا بَ حـ + ا بَ حـَ ≠ صفر (بتطبيق قانون الاستغراق)

هكذا أصبحنا الآن فى وضع نستطيع فيه معرفة صحة الاستدلال الأصلى ، بواسطة توسيع مقدمته الجزئية فقط ، ويصبح الاستدلال فى هذه الحالة ، على النحو الآتى : —

[ا بَ = صفر . ا ح = صفر . (ا ب ح + ا ب حَ + ا بَ حَ ≠ صفر] ⊃ ب حَ ≠ صفر .

نلاحظ فى هذه الحالة أن المقدمتين الكليتين تحيلان ثلاث فئات من الأربع الواردة فى المقدمة الجزئية الموسعة ، إلى فئات فارغة . ومن ثم فلا يمكن أن تكون هناك فئة ذات أعضاء فى المقدمة الموسعة إلا الفئة ا ب حَ . وبما أن الفئة ب حَ الواردة فى النتيجة أعم وأشمل من الفئة ا ب حَ ذات الأعضاء ، فمن الأولى أن تكون الفئة الأشمل ، وهى (ب حَ) ، هى بدورها فئة ذات أعضاء . وعلى ذلك فإن ب حَ ليست فئة فارغة ، أو هى لا تساوى صفرا ، وهو المطلوب إثباته فى النتيجة . إذن فالنتيجة تلزم عن المقدمات ، إذن فالاستدلال صحيح .

ويمكن توضيح هذه الخطوات السابقة فى البرهنة على النحو الآتى : —

١ — إذا كانت ا ح = صفر (فى المقدمة الثانية) ∴ ا ب ح = صفر .

٢ — وإذا كانت ا بَ = صفر (فى المقدمة الأولى) ∴ ا بَ ح = صفر .

٣ — وإذا كانت ا بَ = صفر » ∴ اَ بَ حَ = صفر .

٤ — وبما أن : ا ب ح + ا بَ ح + ا بَ حَ + ا ب حَ ≠ صفر (فى المقدمة الثالثة)

٥ — إذن : صفر + صفر + صفر + ا ب حَ ≠ صفر .

٦ — ∴ ا ب حَ ≠ صفر .

∴ ا ب حَ فئة ذات أعضاء .

٧ — وبما أن ب حَ (الواردة فى النتيجة) أعم وأشمل من الفئة ا ب حَ ،

٨ — إذن فمن الضرورى أن تكون الفئة ب حَ هى بدورها فئة ذات أعضاء .

∴ ب حَ ≠ صفر

∴ فالاستدلال صحيح . وهو المطلوب .

هذا ويمكننا الآن أن نلخص أهم القوانين التي اتبعناها في استدلال قضايا الفئات ، بالإضافة إلى عدد من القوانين الأخرى الخاصة بالفئتين الشاملة والفارغة ، التي وردت في هذا الجزء الخاص بالاستدلال .

وعلى ذلك فالقوانين التالية ، تكون مكملة لقائمة القوانين الخاصة بالحساب التحليلي للفئات التي أوردناها من قبل ، بحيث يمكننا القول بأن القائمتين معاً تحتويان على أهم القوانين الخاصة بالحساب التحليلي للفئات وللاستدلال المتعلق به .

(أ) قوانين الفئة الشاملة والفئة الفارغة :

١ - أ × صفر = صفر

٢ - أ × ١ =

٣ - ١ = $\overline{\text{صفر}}$ ، أو : صفر = أَ

٤ - أ + صفر = أ

٥ - أ + ١ = ١

٦ - (أ = ١) ≡ (أَ = صفر)

٧ - (أ ≠ ١) ≡ (أَ ≠ صفر)

(ب) قوانين التناقض :

١ - ∼ (أ = صفر) ≡ أ ≠ صفر .

٢ - ∼ (أ ≠ صفر) ≡ أ = صفر .

٣ - ∼ (س ⊆ أ) ≡ س ⊆ أَ .

(حـ) قوانين التضاد :

١ - [(ا بَ = صفر . ا ≠ صفر)] ⊃ - (ا ب = صفر) .

٢ - [(ا ب = صفر . ا ≠ صفر)] ⊃ - (ا بَ = صفر) .

٣ - ا = صفر ⊃ - (س ⊆ ا) .

٤ - س ⊆ ا ⊃ - (ا = صفر) .

(ى) قانونا الدخول تحت التضاد :

١ - [- (ا بَ ≠ صفر) . ا ≠ صفر] ⊃ ا ب ≠ صفر .

٢ - [- (ا ب ≠ صفر) . ا ≠ صفر] ⊃ ا بَ ≠ صفر .

(هـ) قانونا التداخل :

١ - (ا بَ = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ا ب ≠ صفر .

٢ - (ا ب = صفر . ا ≠ صفر) ⊃ ا بَ ≠ صفر .

(و) قوانين خاصة بالاختبار الرمزى الموسع :

١ - ا = ا (ب + بَ) = (ا ب حـ + ا ب حَ + ا بَ حـ + ا بَ حَ) .

٢ - ا = صفر ⊃ ا ب = صفر .

٣ - ا ب ≠ صفر ⊃ ا ≠ صفر . (وكذا : ب ≠ صفر) .

٤ - س ⊆ ا ب ⊃ س ⊆ ا . (وكذا : س ⊆ ب) .

الفصل الثالث

الحساب التحليلى للقضايا

Propositional Calculus

يعتبر الحساب التحليلى للقضايا أكثر أجزاء المنطق المعاصر أهمية ، وأكثرها أولية . والأولية هنا لا تعنى الأسبقية الزمنية ، بقدر ما تعنى الأولية المنطقية . وهذا هو السبب فى أن كثيرا من الكتب المنطقية تبدأ بالحساب التحليلى القضايا ، قبل حساب الفئات . وقد أشرنا من قبل إلى أننا نفضل — من الناحية المنهجية — ذكر مكونات القضية (أى الفئات والحدود) قبل ذكر القضايا نفسها ، فى دراسة تمهيدية مبسطة للمنطق الحديث ، كهذه التى بين أيدينا .

وهكذا فنحن فى الحساب التحليلى للقضايا لا ندخل فى إعتبارنا البنية المنطقية الداخلية للقضايا — كما تتضح مثلا من العلاقة بين الموضوع والمحمول فى القضية التقليدية ، بقدر إهتمامنا بالقضايا ككل من حيث ترابطها المنطقى وعلاقتها بغيرها أو بذاتها ، حين تتخذ حيالها بعض الاجراءات المنطقية ، الأمر الذى يترتب عليه التوصل إلى قضايا مركبة هى أقرب إلى الدالات منها إلى القضايا[1] . وبعبارة أخرى فستكون وحدتنا الأساسية فى حساب القضايا ، هى القضية لا الفئة . وباتخاذ بعض الاجراءات إزاء القضايا ، والعلاقات التى تنشأ بينها ، فإننا نستطيع إقامة الحساب التحليلى للقضايا[2] .

---

(١) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 3.

(٢) Mourant, J. A. : Formal Logic, P, 217

ومادام حديثنا سينصرف إلى القضية ككل ، لا إلى مكوناتها ، فسوف نستخدم من الرموز ما يشير إلى القضايا ، كما فعلنا من قبل بالنسبة للفئات . وسوف نستخدم : ق ، ل ، م ... (p.q.r. ....) للدلالة على القضايا ، كما كنا نستخدم من قبل الرموز : ا ، ب ، حـ ... (a.b.c. ...) للدلالة على الفئات ، والرموز : س ، ص ، ... (x.y. ....) للدلالة على الأعضاء المفردة أو للماصدقات الجزئية .

وكما أن الرمز (ا) مثلا يدل على فئة ما ، ولا يدل على فئة بعينها ، من حيث هو متغير ، فكذلك الرمز (ق) مثلا يدل على قضية ما ، من حيث هو متغير ، ولا يدل على قضية معينة بالذات . ومن ثم فالرموز : ق ، ل ، م ... متغيرات ترمز لأى قضايا لا إلى قضايا بعينها . ولتوضيح ذلك نقول أن المتغير Variable هو ما لا يكون له معنى محدد ، بل يكون أشبه بالمجهول الذى تظل قيمته غير معلومة إلى أن نضع بدلا منه رمزا محدد القيمة . أما الثابت Constant فهو ما لا يتغير معناه رغم إختلاف مواضعه ، بل يأخذ معنى محددا ثابتا أينما ورد . ولذا يعرفه رسل بأنه (ما يجب أن يكون شيئا محددا تحديدا مطلقا ، شيئا لا إبهام فيه ألبته)[١] ، أو هو (ما يلعب فى التعبير اللغوى ، أو الرمزى ، للقضايا المنطقية دورا ثابتا)[٢] بحيث يكون له نفس الاسهام فى دلالة القضية حيثما يرد .

وكأمثلة على المتغيرات نذكر : ا ، ب للفئات ، ق ، ل للقضايا ، س ، ص للجزئيات المفردة . وكأمثلة على الثوابت ، وخاصة الثوابت المنطقية ، نذكر : « أو » ، « و » ، « لا » ، « إذا ... إذن » ، وغير ذلك[٣] وهى التى سوف نرمز لها بالرموز التالية :

« ∨ » ، « . » ، « ~ » ، « ⊃ » على الترتيب ، فى الحساب التحليلى للقضايا .

(١) برتراند رسل : أصول الرياضيات . (ترجمة الدكتورين أحمد فؤاد الأهوانى ، محمد مرسى أحمد) ، الجزء الأول (صفحة ٣٥) .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ١١ .

(٣) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

وبما أن الرموز التي ذكرناها كمتغيرات للقضايا مثل : ق ، ل . . إنما تدل على قضايا بسيطة ، فإنها لو ترابطت بعضها مع بعض باستخدام الثوابت المنطقية ، أو لو أدخلنا عليها بعض الثوابت المنطقية لحصلنا من ذلك على ما يسمى باسم دالات الصدق . وعادة ما يسمى إستخدامنا للثوابت المنطقية بالنسبة للمتغيرات في المنطق الحديث ، بالاجراءات التي تتبع إزاء متغيرات القضايا . وسنذكر فيما يلي بعض هذه الاجراءات : —

أهم الاجراءات التي تتبع إزاء القضايا :

ويمكن أن نقسمها إلى قسمين : إجراءات بسيطة ، أو واحدية(١) ، وإجراءات مركبة تتركب من أكثر من إجراء ، وفيما يلي تفصيل ما أوجزناه :

أولا : الاجراءات البسيطة :

ويتمثل أهمها في : —

١ — النفي Negatiou ويرمز له بالعلامة « ـ »(٢) التي توضع قبل القضية المراد نفيها مثل : (ـ ق) التي تكون نفيا للقضية (ق) .

هذا ويلاحظ أننا لو كررنا إجراء النفي مرة أخرى لحصلنا على القضية المثبتة الأصلية بمعنى أن : ق ≡ ـ ـ ق(٣)

وذلك لأن نفي النفي إثبات . ولذا فإننا عادة ما نضع بدلا من (ـ ـ ق) الرمز

---

(١) monadic

(٢) وتسمى العلاقة الخاصة بالاجراء عادة ، مثل « ـ » وغيرها باسم علامة الاجراء أو عامل الاجراء Operator .

(٣) كما كنا نقول في حساب الفئات أن : ا = اَ .

(ں)(١) . ولنتذكر دائما أن نفى « ــ ں » هو « ں » ، كما أن نفى « ں » هو « ــ ں » .

وتسمى القضيتان اللتان تكون إحداها نفيا للأخرى بالقضيتين المتناقضتين(٢) Contradictory sentences ، وذلك لأن صدق إحداها تستلزم دائما كذب الأخرى فهما لا تصدقان معاً ولا تكذبان معا . بمعنى أنه لو كانت القضية « ں » صادقة ، كانت « ــ ں » كاذبة ، وبالعكس فلو كانت « ــ ں » صادقة ، كانت « ں » كاذبة . وأيضا لو كانت « ں » كاذبة ، كانت « ــ ں » صادقة ، وبالعكس ، فلو كانت « ــ ں » كاذبة ، كانت « ں » صادقة .

٢ — الضرب المنطقى :

أو كما يسمى أحيانا بالعطف المنطقى Conjunction . ويمكن تمثيل صورته العامة بالصيغة التالية :

ں . ل

التى تعنى : أن القضيتين ں ، ل صادقتان معاً . ويلاحظ هنا أن النقطة التى ترد بين القضيتين فتربط بينهما فى التعبير السابق ، تعنى ما تعنيه الأداة « و » . وعادة ما تسمى القضايا التى يتم ربطها على هذا النحو (مثل ں ، ل) بعناصر العطف members of conjunction أو عوامل حاصل الضرب المنطقى Factors of logical product ، أو القضايا المعطوفة أو المضروبة . كما يسمى التعبير المركب الذى ينتج عن ضرب قضيتين أو أكثر ، أو عطفهما ، بالقضية العطفية Conjunctive proposition

---

(١) كما أننا نضع بدلا من أً ، الرمز ا فى حساب الفئات .

(٢) Tarski, A. : Introduction to Logic P,20

ولهذا الكتاب ترجمة عربية قام بها المؤلف ولا تزال تحت الطبع .

أو بحاصل الضرب المنطقي Logical product . ويمكن توضيح معنى الضرب المنطقي للقضايا على النحو الآتي : ـ

لو كانت القضية « ق » تدل على أن (٢ عدد صحيح موجب) ، وكانت « ل » تدل على أن (٢ أصغر من ٣) ، وربطنا بينهما بأداة العطف « و » . لحصلنا على القضية العطفية التالية : ـ

٢ عدد صحيح موجب ، و ٢ أصغر من ٣) ، التي نعبر عنها رمزيا بالصيغة :

(ق . ل)

ونلاحظ في هذه الحالة أن صدق القضية العطفية يكون مساويا لصدق القضيتين المعطوفتين . فإذا كانت القضية العطفية (ق . ل) صادقة ، كانت مكوناتها (ق) ، (ل) صادقة أيضا ، وبالعكس فإذا كانت القضيتان المعطوفتان (ق) ، (ل) صادقتين كانت كذلك القضية العطفية . أما إذا كان أحد عناصر القضية العطفية على الأقل كاذبا ، كانت القضية العطفية كلها كاذبة(١) . وأيضا إذا كانت القضية العطفية كاذبة ، كانت كذلك إحدى القضايا المعطوفة ، أو كلها كاذبة . وسنعود إلى تفصيل ذلك حين نعبر عن دالات الصدق بقوائم الصدق فيما بعد .

بعض نتائج الضرب المنطقي للقضايا :

(أ) ق . ل ≡ ل . ق

وتقرأ : إن القول بصدق القضيتين ق . ل معاً ، يكافىء القول بصدق القضيتين ل ، ق معاً . وهذا يعني أن ترتيب القضايا في حالة العطف لا يغير من صدقها .

---

(١) المرجع السابق الموضع نفسه .

فسواء بدأت بعطف القضية ق إلى القضية ل ، أو بعطف القضية ل إلى القضية ق ، فالصدق الناتج يكون هو هو فى كلتا الحالتين .

(ب) ق . ق ≡ ق

وتقرأ : إن القول بالقضية ق ، والقضية ق فى الوقت نفسه مرة أخرى ، مكافىء القول بالقضية ق مرة واحدة فقط . وبعبارة أخرى ، فإن تكرار القول بأن القضية ق صادقة مرتين أو أكثر ، مكافىء لقولنا مرة واحدة بصدق هذه القضية .

وهكذا يمكننا أن نكتب التعبير الصحيح التالى :—

ق . ق . ق . . . . ≡ ق

٣ — الجمع المنطقى :

ونسميه كذلك بالفصل Disjunction المنطقى . وتتمثل صورته العامة فى الصيغة التالية :—

ق v ل

التى تعنى بصفة عامة القول بصدق واحدة من القضيتين ق أو ل ، أو صدقهما معاً . ويلاحظ أن العلامة « v » التى ترد بين القضيتين فتربط بينهما فى التعبير السابق ، تعنى ما تعنيه الأداة « أو » التى تفيد الجمع addition أو الفصل فى المنطق، وهو نفس المعنى الذى تفيده العلامة « + » السابق إستخدامها فى منطق الفئات .

ولكن الفصل فى المنطق إما فصل ضعيف أو فصل قوى ، وقد أوضحنا ذلك من قبل بالنسبة لجمع الفئات(١) ، وهو ما ينطبق كذلك بالنسبة لحساب القضايا ،

---

(١) وقد إستخدمنا العلامة « + » للفصل الضعيف ، واستخدمنا العلامة « (+) » للتعبير عن الفصل القوى فى حساب الفئات .

فنحن نستخدم العلامة « v » للتعبير عن الفصل الضعيف بين القضايا ، كما نستخدم العلامة « (v) » للتعبير عن الفصل القوى أو الاستبعادى بين القضايا . ولكى نفرق بين العلامتين ، سنكتب الأولى بمعنى « أو » وسنكتب الثانية بمعنى « إما .... أو » . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى :ـ

(ا) إذا كان لدينا التعبير التالى :ـ

ن v ل

قرأناه : أن إحدى القضيتين ن أو ل صادقة ، مع إمكان صدقهما معاً . فإذا كانت « ن » ترمز للقضية : (الطالب مجتهد) ، وكانت « ل » ترمز للقضية « الطالب ذكى » ، أمكننا أن نكتب التعبير (ن v ل) على النحو الآتى :ـ

(الطالب مجتهد أو ذكى)

وهذا يعنى صدق إحدى الحالات التالية :ـ

١ ـــ أن تكون القضية (الطالب مجتهد) ، أى « ن » صادقة .

٢ ـــ أو أن تكون القضية (الطالب ذكى) ، أى « ل » صادقة .

٣ ـــ أو أن تكون كل من القضيتين « ن » ، « ل » صـــادقة فيكون الطالب مجتهدا وذكيا فى الوقت نفسه .

وسنسمى القضية الناتجة عن جمع القضيتين أو أكثر باسم القضية الفصلية disjunctive أو بحاصل الجمع المنطق Logical Sum . كما نسمى القضايا المجموعة باسم عناصر الفصل المنطقى ، أو عناصر القضية الفصلية ، أو العناصر المفصولة فى حاصل الجمع المنطق . هذا ويلاحظ فى المثال السابق أن القضية الفصلية تكون صادقة إذا كانت إحدى القضيتين المفصولتين أو المجموعتين صادقة ، أو كانتا صادقتين معاً ؛

ولا تكون صادقة فى حالة كذبهما معاً . وبالعكس فإذا كانت القضية الفصلية صادقة ، كانت إحدى القضيتين المفصولتين — على الأقل — صادقة ، مع إمكان أن تكونا صادقتين معاً ، ومع إستحالة كذبهما معاً .

(ب) أما إذا كان لدينا التعبير التالى :

ں (٧) ل

فيقرأ : إن إحدى القضيتين « ں » أو « ل » صادقة ، مع إستحالة صدقهما معاً . فإما أن تكون « ں » صادقة أو « ل » صادقة لكنهما لا تكونا كذلك معاً فى الوقت نفسه . فإذا صدقت القضية « ں » ، كذبت القضية « ل » ، وإذا كذبت القضية « ں » ، صدقت القضية « ل » . وبالعكس فإذا صدقت « ل » ، كذبت « ں » ، وإذا كذبت ل ، صدقت ں(١) .

وتسمى القضية المعبرة عن الفصل القوى أحياناً باسم قضية البدائل ، لأننا نتكلم عن صدق واحدة من القضيتين البديلتين فقط . وهكذا تكون القضية المعبرة عن الفصل القوى ، أو قضية البدائل ، صادقة إذا كانت إحدى القضيتين البديلتين أو المفصولتين صادقة ، وتكون كاذبة فى حالة صدق القضيتين المفصولتين معاً أو كذبهما معاً . وبالعكس فلو كانت القضية المعبرة عن الفصل القوى صادقة ، دل هذا على صدق أحد البديلين . أما لو كانت كاذبة ، فإن هذا يدل إما على صدق البديلين معاً أو كذبهما معاً . وسيزداد وضوح هذا الفارق بين الفصلين القوى والضعيف حينما نعبر عن صدقهما بقوائم الصدق فيما بعد .

---

(١) وهى نفس العلاقة التى نجدها بين القضيتين المتقابلتين بالتناقض .

بعض نتائج الجمع المنطقى للقضايا :

١ — أولا : ق ٧ ل ≡ ل ٧ ق .

ثانيا : ق (٧) ل ≡ ل (٧) ق .

وهذا يعنى (أولا) : إن القول بأن « ق » صادقة أو « ل » صادقة ، يكافىء القول بأن « ل » صادقة أو « ق » صادقة .

ويعنى (ثانيا) : أن القول « بإما أن تكون ق صادقة أو ل صادقة » ، يكافىء القول « بإما أن تكون ل صادقة أو ق صادقة » .

وهكذا فترتيب القضايا فى حالة الجمع لا يغير من كمية الصدق ، فسواء بدأت الجمع بالقضية ق إلى القضية ل أو بالعكس ، بالقضية ل إلى القضية ق ، فالصدق هو هو فى كلتا الحالتين .

٢ — أولا : ق ٧ ق ≡ ق .

ثانيا : ق (٧) ق ≡ ق .

وتعنى هذه النتيجة أن حاصل جمع أية قضية إلى نفسها يكافىء القول بالقضية ذاتها قبل الجمع . أو بعبارة أخرى تكون القضية الفصلية مكافئة لأية واحدة من القضيتين المفصولتين (سواء كان هذا الفصل فصلا ضعيفا أو قويا) .

ويلزم عن هذا أننا لو كررنا عملية جمع القضية إلى نفسها أكثر من مرة لحصلنا على القضية الأصلية ذاتها . ولنوضح ذلك بالمثال التالى : ـ

ق ٧ ق ≡ ق (ولنرمز للشطر الأيسر من التكافؤ بالرمز ق١)

∴ ق ٧ ق ≡ ق١

ق١ ٧ ق١ ≡ ق١ (ونرمز للشطر الأيسر من التكافؤ بالرمز ق٢)

∴ ق١ ٧ ق١ ≡ ق٢

∴ ق٢ ≡ ق١

، ∴ ق١ ≡ ق

∴ ق ٧ ق ٧ ق ..... ≡ ق .

ثانيا : الاجراءات المركبة Compound Operations

وهى التى تتكون من إجراءين أو أكثر ، وسنذكر فيما يلى بعض هذه الاجراءات على سبيل المثال لا الحصر : ـ

١ — الاجراء المركب من النفى والضرب

مثل : —

١ — ق . ـ ل ≡ ـ ل . ق

وتقرأ : إن القول بصدق القضية ق ، وكذب القضية ل معاً ، مكافىء للقول بكذب القضية ل وصدق القضية ق معاً .

وللبرهنة على صحة ذلك نضع المتغير (م) بدلا من (ـ ل) ، فنحصل على :

ق . م ≡ م . ق

ومثل : —

٢ — ق . ـ ل ≡ ـ ل . ـ ق

وتقرأ : إن القول بكذب القضيتين ق ، ل معاً يكافىء القول بكذب القضيتين ل ، ق معاً .

٢ — الاجراء المركب من النفي والجمع

مثل : —

١ — ق ∨ ~ل ≡ ~ل ∨ ق

وتقرأ : إن القول بصدق القضية ق أو كذب القضية ل ، يكافىء القول بكذب ل أو صدق ق .

وللبرهنة على صحة ذلك نضع المتغير (م) بدلا من (~ل) فنحصل على :

ق ∨ م ≡ م ∨ ق

٢ — ومثل ~ق (∨) ~ل ≡ ~ل (∨) ~ق

وتقرأ : إن القول بإما أن تكون القضية ق كاذبة أو أن تكون القضية ل كاذبة ، مكافىء للقول بأنه إما أن تكون ل كاذبة أو أن تكون ق كاذبة .

٣ — الاجراء المركب من النفي والجمع والضرب

مثل : —

١ — ~(ق . ل) ≡ ~ق ∨ ~ل

وتقرأ : إن كذب القول بأن ق ، ل صادقتان معاً ، يكافىء القول بكذب القضية ق ، أو كذب القضية ل .

٢ — ومثل : ~(ق ∨ ل) ≡ ~ق . ~ل

وتقرأ : إن كذب القول بصدق القضية ق أو بصدق القضية ل ، مكافىء للقول بكذب القضيتين ق ، ل معاً .

أهم العلاقات بين القضايا :

١ — علاقة الهوية Identity : وتنشأ بين القضية ونفسها كأن نقول :

ق ≡ ق .

ونعنى بهذه الصيغة أن أية قضية تكون هى هى نفسها وتكون مكافئة لنفسها .

ويلاحظ هنا أننا قد عبرنا عن علاقة الهوية بين القضايا باستخدام علامة التكافؤ(١) وإن كنا نستطيع التعبير عنها بعلامات أخرى ، كما سيتضح فيما بعد .

٢ — علاقة التكافؤ Equivalence :

والتكافؤ قد يكون بين القضية الواحدة ونفسها — كما فى المثال السابق — فيكون معبراً عن الهوية ، كما قد يكون بين قضيتين أو أكثر مثل : —

ق ≡ ل

أو : ق ≡ ل ≡ م .

فيعبر فى هذه الحالة عن تساوى كمية الصدق فى القضايا المتكافئة . كما يعبر فى الوقت نفسه عن اللزوم المتبادل بين القضيتين المتكافئتين . فلو كانت لدينا الصيغة التالية :

ق ≡ ل

لكان معنى ذلك أن كلا من القضيتين ق ، ل تلزم عن الأخرى وتستلزمها كذلك ، أى أن تكون (ق ⊃ ل) ، كما تكون (ل ⊃ ق) .

---

(١) كما عبرنا من قبل عن علاقة الهوية بين الفئات بعلامة التساوى « = » .

والواقع أن التكافؤ لا يقوم فقط بين قضايا مفردة بسيطة مثل ں أو ل ، بل من الممكن أن يقوم كذلك بين قضايا مركبة مثل :—

ں ٧ ل ≡ ل ٧ ں

٣ — علاقة اللزوم :

ويمكن أن نعبر عنها بالصيغة العامة التالية :—

ں ⊃ ل

ويلاحظ هنا إننا قد إستخدمنا العلامة « ⊃ » للتعبير عن اللزوم بين القضايا ، وهى نفس العلامة التى إستخدمناها من قبل للدلالة على التضمن بين الفئات . وما يميز العلامة فى هذه الحالة ، عنها فى حالة الفئات ، هى الرموز التى ترد معها فى كلتا الحالتين . فإذا إرتبطت برموز مثل : ا ، ب ، حـ ... كانت دالة على التضمن بين الفئات ، أما إذا إرتبطت برموز مثل : ں ، ل ، م ... كانت دالة على اللزوم بين القضايا . وهكذا فإننا نقرأ الصيغة السابقة (ں ⊃ ل) ، على النحو الآتى :

إن صدق القضية ں ، يلزم عنه صدق القضية ل . أو تقرأ : إن صدق القضية ں يستلزم صدق القضية ل . أو تقرأ (باعتبارها قضية شرطية متصلة) : إذا كانت القضية ں صادقة ، كانت إذن القضية ل صادقة .

بهذا المعنى الأخير ، تصبح العلامة « ⊃ » من حيث هى سوء لقضية شرطية مرادفة لقولنا « إذا ... إذن ... » (if ... then ...) . كما تصبح القضية « ں » هى المقدم أو السابق antecedant ، وتصبح القضية « ل » هى التالى Consequent أو اللاحق فى القضية الشرطية (ں ⊃ ل) .

وما دمنا قد أسمينا العلاقة بين ں ، ل بعلاقة اللزوم فى المنطق الرمزى ، فسوف

تسمى القضية الشرطية المتصلة كلها بقضية اللزوم أو القضية اللزومية Implicative وتسمى القضية ق ، وهى المقدم أو السابق فى هذه القضية اللزومية باسم الملزوم Implicans وتسمى القضية ل ، وهى التالى أو اللاحق فى هذه القضية باسم اللازم Implicate.

وهناك عدة ملاحظات تتصل بعلاقة اللزوم بين القضايا ، نورد أهمها على النحو الآتى :—

١ — إن علاقة اللزوم ليست بالعلاقة المتبادلة بين الملزوم واللازم . وهذا واضح من أحكام القضية الشرطية التى تتلخص فى :—

(أ) إن صدق المقدم يستلزم صدق التالى ، وليس العكس .

(ب) إن كذب التالى يستلزم كذب المقدم ، وليس العكس .

وعلى ذلك فنى الصيغة الرمزية التالية :

ق ⊃ ل

نجد أن :

(أ) صدق القضية ق يستلزم صدق القضية ل . لكن صدق ل لا يستلزم صدق ق . وهذا ما يمكن أن نعبر عنه رمزياً بالصيغة التالية :—

ق ⊃ ل ←/→ ل ⊃ ق . (١)

التى تقرأ : إن القول بأن صدق القضية ق يستلزم صدق القضية ل لا يكافىء القول بأن صدق القضية ل يستلزم صدق القضية ق .

---

(١) وقد استخدمنا العلامة « ←/→ » لكى تعنى عدم التكافؤ ، كما استخدمنا من قبل العلامة « ≠ » لكى تعنى عدم التساوى بين الفئات .

(ب) كما أن كذب اللازم (ل) يستلزم كذب الملزوم (ه) ، لكن كذب ه لا يستلزم كذب ل . ويمكننا أن نعبر عن ذلك رمزياً كما يلى :—

أولا : ه ⊃ ل ≡ - ل ⊃ - ه

وتقرأ : إن القول بأن ه تستلزم ل ، يكافئ القول بأن كذب ل يستلزم كذب ه . ويسمى اللزوم فى هذه الحالة (أى الذى يعبر عن أن كذب اللازم يستلزم كذب الملزوم) بإسم اللزوم العكس Counter - implicaiton ، كما تسمى الصيغة السابقة أحياناً بإسم مبدأ عكس النقيض .

ثانياً : ه ⊃ ل ←/→ - ه ⊃ - ل

وتقرأ : إن القول بأن ه تستلزم ل ، لا يكافىء القول بأن كذب ه يستلزم كذب ل .

٢ — إن اللزوم بين القضايا يكون متبادلا فى حالة واحدة فقط ، هى حين يكون هناك تكافؤ بين اللازم والملزوم . فلو كانت القضية ه تستلزم القضية ل ، وكانت القضية ل تستلزم القضية ه فى الوقت نفسه ، كانت القضية ه مكافئة للقضية ل . ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً على النحو الآتى :—

ه ⊃ ل . ل ⊃ ه ≡ (ه ≡ ل) .

وتقرأ : إن القول بأن ه تستلزم ل ، وأن ل تستلزم ه فى الوقت نفسه ، مكافىء للقول بأن القضية ه تكافىء القضية ل(١) .

---

(١) وقد عبرنا من قبل عن مبدأ شبيه بهذا فى حساب الفئات وهو :

(ا ⊃ ب) . (ب ⊃ ا) ≡ (ا = ب) .

وبالعكس ، فلو كانت القضية ق تكافىء القضية ل ، لكان معنى ذلك أن تكون كل من القضيتين مستلزمة للأخرى . ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلى :ـ

(ق ≡ ل) ≡ ق ⊃ ل . ل ⊃ ق .

٤ ـ علاقة التنافر Incompatibility :

ويمكن تعريف التنافر على أنه عناد ضرورى بين قضيتين (أو أكثر) ، كل قضية منهما يمكن إفتراض صدقها على حدة ، لكن من المستحيل صدقهما معاً(١) .

مثل :ـ

أولا : ـ (ق . ـ ق)

وتقرأ : إنه من الكذب أن تكون كل من القضية ق ونفيها أو نقيضها ، صادقة فى وقت واحد ، لأن هذا معناه أن تكون القضية الواحدة «ق» صادقة وكاذبة فى آن واحد .

ثانياً : ومثله ـ (ق . ل)

وتقرأ : إنه من الكذب أن نقول بصدق القضيتين ق ، ل معاً (وذلك فى حالة وجود تناقض أو تضاد بين القضيتين ق ، ل . لأن الحكم فى كلتا الحالتين ينفى صدق القضيتين فى وقت واحد) .

بعض القوانين الابتدائية الخاصة بحساب القضايا :

سنقتصر فيما يلى على أهم القوانين التى تعبر عن الإجراءات والعلاقات السابق ذكرها بالنسبة لحساب القضايا ، وسنكمل هذه القائمة بقائمة أخرى تعبر عن أهم القوانين

(٢) د . زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى ، الجزء الأول ، صفحة ٣١٢

الخاصة بالقضايا واستدلالاتها ، بعد أن نعرض لأهم الاستدلالات الخاصة بحساب القضايا .

١ — قانون الهوية Law of Identity :

ويمكن التعبير عنه رمزياً على أكثر من نحو مثل(١) :

١ — ق ≡ ق

وتقرأ : ق تكافىء ق (أو أن أية قضية تكافىء نفسها) .

٢ — ق ←/→ ~ ق

وتقرأ : إن صدق القضية لا يكافىء كذبها .

٣ — ق ⊃ ق

وتقرأ : إذا كانت ق صادقة ، كانت ق إذن صادقة .

٢ — قانون التناقض Law of Contradiction :

أولا : ~ (ق . ~ ق)(٢)

---

(١) وإن كان هانز رايشنباخ يعبر عن هذا القانون بالصيغة الأولى بالاضافة إلى الصيغتين التاليتين : (ق ∨ ق ≡ ق) ، (ق . ق ≡ ق) وذلك فى كتابه :—

Reichenbach, H : Elements of Symbolic Logic , P, 38

(٢) وهو يعبر عن معنى التنافر ، كما أشرنا من قبل ، ويناظر قانون التناقض الذى أوردناه فى حساب الفئات وعبرنا عنه بالصيغة ا × اَ = صفر .

ويقرأ : إن القول بأن القضية ~ق صادقة ، وبأنها كاذبة فى الوقت نفسه قول كاذب(١) .

ثانياً : كما يمكن التعبير عن المعنى السابق أيضاً كما يلى :—

ق . ~ ق = صفر

وتقرأ هذه الصيغة : إن القول بأن القضية ق صادقة ، وبأنها كاذبة فى الوقت نفسه ، هو قول كاذب دائماً . ويلاحظ هنا إننا إستخدمنا تعبيراً جديداً ، وهو (ق = صفر) ويعنى أن القضية ق كاذبة دائماً .

٣ — قانون الوسط المرفوع Law of Excluded Middle

ويمكن التعبير عنه رمزياً كما يلى :

ق ٧ ~ ق(٢)

ويتلخص فى القول بأنه إما أن تكون القضية ق صادقة أو أن تكون القضية (~ ق) صادقة (أو أن القضية ق كاذبة) ولا وسط بين الحالتين البديلتين .

---

(١) يلاحظ فى هذه الصيغة أننا وضعنا علامة النفى « ~ » خارج القوس تعبيراً عن نفى القول كله لا إحدى مكوناته . وإن كان هناك من يفضل طريقة أخرى للتعبير عن نفى القضية العطفية كلها ، وذلك بوضع خط أفقى فوق متغيرات القضية العطفية كلها مثل :

$\overline{ق . ~ ق}$. وهو التعبير الذى أوره هانز رايشنباخ فى كتابه سالف الذكر ، صفحة ٣٨ .

(٢) ويناظر القانون : ا + اَ = ا فى حساب الفئات .

نلاحظ فى هذه الحالة أن قانون الوسط المرفوع شبيه بحالة الجمع أو الفصل القوى مثل :

ں $\overline{(v)}$ ل

الذى يفيد صدق إحدى القضيتين ں أو ل مع إستحالة صدقهما معاً . وللتمييز بين قانون الوسط المرفوع وبين صيغة الجمع القوى للقضايا يمكن القول : بأن قانون الوسط المرفوع نوع من الجمع القوى ، فى حين أن الجمع القوى ليس متصوراً على قانون الوسط المرفوع . طالما أن قانون الوسط المرفوع قائم على جمع قضيتين هما ں ، ـ ں فى حين أن الجمع القوى يمكن أن يكون جمعاً لقضيتين متناقضتين أو متضادتين . ومن ثم يمكن الانتهاء إلى القول بأن الجمع القوى أعم وأشمل من قانون الوسط المرفوع .

٤ — قانون تحصيل الحاصل Law of Tautology :

ويمكن التعبير عنه بأكثر من صيغة مثل :

أولا : ں . ں ≡ ں (فى حالة الضرب المنطقى)(١)

ثانياً : ں v ں ≡ ں (فى حالة الجمع المنطقى)(٢)

والتقارب الكبير بين هذه الصيغ المعبرة عن تحصيل الحاصل ، وبين الصيغ المعبرة عن الهوية فقد ذهب بعض المناطقة إلى جمعهما تحت قانون واحد هو قانون الهوية، مثل هانز رايشنباخ(٣) الذى أورد هاتين الصيغتين الخاصتين بتحصيل الحاصل ، مع الصيغة المعبرة عن الهوية .

---

(١) ويناظر الصيغة : ١ × ١ = ١ فى حساب الفئات .

(٢) ويناظر الصيغة : ١ + ١ = ١ فى حساب الفئات .

(٣) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, p. 38

٥ — قانونا التبسيط Law of Simplification

أولا : ق ⊃ (ق ∨ ل) (الخاص بالجمع)

وتقرأ : إذا كانت ق كانت إذن ق أو ل . كما تقرأ أيضاً : أن صدق القضية ق يستلزم القول بصدق واحدة من القضيتين : ق أو ل (أو صدقهما معاً) .

وبعبارة أخرى فإن صدق أية قضية مثل ق يترتب عليه إمكان جمع هذه القضية إلى أية قضية أخرى مثل ل .

ثانياً : (ق . ل) ⊃ ق (الخاص بالضرب)

وتقرأ : إذا كانت ق ، وكانت ل ، كانت إذن ق .

وبعبارة أخرى : إذا كانت القضية المعطفية (ق . ل) صادقة ، لزم عن هذا أن تكون القضايا المعطوفة نفسها صادقة ، وبالتالى تكون ق صادقة ، كما تكون ل صادقة أيضاً . ومن ثم يمكننا أن نكتب كذلك :

(ق . ل) ⊃ ل .

وتقرأ : إذا كانت ق ، وكانت ل ، كانت إذن ل . أو تقرأ : إن القول بصدق ق ، ل معاً يستلزم صدق ل على حدة .

٦ — قانونا التبادل Laws of Commutation

أولا : ق . ل ≡ ل . ق (فى حالة الضرب للنطق)(١)

ثانياً : ق ∨ ل ≡ ل ∨ ق (فى حالة الجمع للنطق)(٢)

---

(١) وتناظر هذه الصيغة ، الصيغة ا × ب = ب × ا فى حساب الفئات .

(٢) وتناظر هذه الصيغة ، الصيغة ا + ب = ب + ا فى حساب الفئات .

وقد سبق توضيح معنى التبادل بين القضايا من قبل بالتفصيل .

٧ — قانونا الترابط Laws of association

أو قانونا ترتيب الحدود :—

أولا : ى (ل . م) ≡ (ى . ل) م ≡ (ى . م) ل .

أو : ى (ل . م) ≡ م (ى . ل) ≡ ل (ى . م) .(١)

وتقرأ : إن القول بصدق القضية ى ، والقضية العطفية (ل . م) معاً ، يكافىء القول بصدق القضية م والقضية العطفية (ى . ل) معاً ، ويكافىء القول بصدق القضية ل ، والقضية العطفية (ى . م) معاً .

ثانياً : ى ٧ (ل ٧ م) ≡ م ٧ (ى ٧ ل) ≡ ل ٧ (ى ٧ م) .(٢)

وتقرأ : إن القول بصدق القضية ى أو صدق القضية الفصلية (ل ٧ م) ، يكافىء القول بصدق القضية م أو القضية الفصلية (ى ٧ ل) ، ويكافىء القول بأن تكون القضية ل صادقة أو أن تكون كذلك القضية الفصلية (ى ٧ م) .

---

(١) وتناظر فى حساب الفئات الصيغة ا (ب حـ) = ب (ا حـ) = حـ (ا ب) .

(٢) وتناظر فى حساب الفئات الصيغة التالية :

ا + (ب + حـ) = ب + (ا + حـ) = حـ + (ا + ب) .

الاستدلال الخاص بالقضايا

بعض أنواع الاستدلال المتعلقة بحساب القضايا :

سوف نعرض فيما يلي لأهم هذه الاستدلالات ، مع ملاحظة أن ما سوف نذكره منها لا يمثل حصراً كاملا للإستدلالات المتعلقة بحساب القضايا ، بل سنكتفي بذكر بعض هذه الاستدلالات ، وبعبارة أكثر دقة ، سنقتصر على ذكر ما هو أساسى منها في حساب القضايا .

وسنقوم بتصنيف هذه الاستدلالات إلى فئتين :

(ا) فئة تتعلق بالاجراءات والعلاقات الخاصة بحساب القضايا .

(ب) وفئة تتعلق بإستخدام قوائم الصدق .

وفيما يلي تفصيل ذلك :—

أولا — بعض الاستدلالات القائمة على الاجراءات والعلاقات الخاصة بحساب القضايا

(ا) استدلالات قائمة على اللزوم :

١ — (ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل (١)

وتقرأ : إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل ، وكانت ق صادقة ، فإنه يلزم

(١) أو تكتب أيضاً : [(ق ⊃ ل) . ق] ⊃ ل .

عن هذا أن تكون القضية ل صادقة(١). ومعنى ذلك إننا قد إستدللنا على صدق القضية ل بناء على صدق القضية ى التى تستلزمها . وهكذا فنحن يمكننا أن نستدل على صحة قضية ما مثل ل ، لو جعلناها تالياً فى قضية لزومية ، المقدم فيها (مثل ى) قضية صادقة . وبما أن الحكم فى القضية اللزومية — كما سبق أن أوضحنا .. يتلخص فى :

(ا) أن صدق المقدم يستلزم صدق التالى .

(ب) وأن صدق التالى لا يستلزم صدق المقدم .

(حـ) وأن كذب المقدم لا يستلزم كذب التالى .

(ء) أن كذب التالى يستلزم كذب المقدم .

فإننا نستنتج أن الصيغة التالية :

٢ — (ى ⊃ ل) . ل : ⊃ : ى

تعبر عن إستدلال غير صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية ى تستلزم القضية ل ، وكانت ل قضية صادقة ، لزم عن هذا أن تكون ى قضية صادقة أيضاً ، وهو إستدلال غير صحيح لأننا لا نستطيع الإستدلال على صدق القضية ى ، لو كانت مقدماً فى قضية لزومية ، بناء على صدق التالى (ل) فى تلك القضية ، وإلا خالفنا القاعدة الثانية من قواعد اللزوم . أو بعبارة أخرى ، لأن (ى ⊃ ل) لا تعنى (ل ⊃ ى) ، أو لأن المقدمتين فى هذه الصيغة اللزومية لا تستلزمان النتيجة .

---

(١) وقد عرفت هذه القضية الإستدلالية فى المنطق باسم قاعدة الإثبات Modus Poens أو بمعنى أدق قاعدة الإثبات بالإثبات Modus ponendo ponens أو الوضع بالوضع .

٣ — كما نستنتج أن الصيغة التالية :

(ق ⊃ ل) . ~ ق : ⊃ : ~ ل

تعبر عن إستدلال غير صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل ، وكانت القضيــة ق كاذبة ، ترتب على ذلك كله أن تــكون القضية ل كاذبة والاستدلال غير صحيح لأننا لا نستطيع الإستدلال على كذب التالى فى قضية اللزوم بناء على كذب المقدم فيها وإلا خالفنا القاعدة الثالثة من قواعد اللزوم .

وبعبارة أخرى نقول أن الصيغة الرمزية السابقة تعبر عن إستدلال غير صحيح لأن (ق ⊃ ل) لا تعنى (~ ق ⊃ ~ ل) ، أو بصفة عامة لأن المقدمتين فى هــذا الاستدلال لا تستلزمان النتيجة .

٤ — كما نستنتج أن الصيغة التالية : —

(ق ⊃ ل) . ~ ل : ⊃ : ~ ق

تعبر عن إستدلال صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية ق تستلزم القضية ل ، وكانت القضية ل كاذبة ، لزم عن ذلك أن تــكون القضية ق كاذبة أيضاً . ومعنى ذلك أننا قد إستدللنا على كذب قضية ما مثل ق ، حين وضعناها مقدماً فى قضية لزومية ، والتالى فيها (مثل ل) قضية كاذبة .

وهكذا لو لحصنا الصيغ اللزومية السابقة ، واعتبرناها من بين الصيغ الأساسية التى تعبر عن الإستدلال ، الصحيح منه وغير الصحيح ، لحصلنا على : —

١ — (ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل (استدلال صحيح)

٢ — (ق ⊃ ل) . ل : ⊃ : ق (استدلال غير صحيح)

٣ — (ق ⊃ ل) . ~ ق : ⊃ : ~ ل (استدلال غير صحيح)

٤ — (ى ⊃ ل) . ~ ل : ⊃ : ~ ى (استدلال صحيح)

الآن ، لو كانت لدينا الصيغ اللزومية التالية مثلا : —

١ — (م ⊃ ~ ن) . م : ⊃ : ~ ن

٢ — (~ م ⊃ ~ ن) . ن : ⊃ : م .

٣ — (~ م ⊃ ن) . م : ⊃ : ~ ن .

٤ — (~ م ⊃ ن) . ن : ⊃ : ~ م .

٥ — (~ م ⊃ ~ ن) . ~ ن : ⊃ م .

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت معبرة عن إستدلالات صحيحة أم لا ، فإننا نلجأ إلى تحويل هذه الصيغ بقـــدر الإمـكان إلى الصيغ العامة اللزومية المعبرة عن الاستدلالات بحيث تصبح الصيغة التى تتحول إلى صيغة أساسية معبرة عن إستدلال صحيح ، هى بدورها صيغة لزومية معبرة عن إستدلال صحيح ، وإلا كانت معبرة عن إستدلال غير صحيح . وذلك كما يلى :

١ — فى الصيغة الأولى : (م ⊃ ~ ن) . م : ⊃ : ~ ن

لو وضعنا ى بدلا من (م) ، ل بدلا من (~ ن) فإننا نحصل على : —

(ى ⊃ ل) . ى : ⊃ : ل

وهى الصيغة الصحيحة الأولى من الصيغ اللزومية الأساسية الأربع . ومن ثم فالصيغة الأصلية تكون كذلك معبرة عن إستدلال صحيح .

٢ — فى الصيغة الثانية : (~ م ⊃ ~ ن) . ن : ⊃ : م

لو وضعنا ى بدلا من (~ م) ، ل بدلا من (~ ن) ، لحصلنا على :

(ى ⊃ ل) . ~ ل : ⊃ : ~ ى

وهى الصيغة الرابعة الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية السابقة ، ومن ثم فالصيغة الأصلية تكون كذلك صيغة لزومية معبرة عن إستدلال صحيح .

٣ — وفى الصيغة الثالثة : (~م ⊃ ن) . م : ⊃ : ~ن

لو وضعنا ق بدلا من (~م) ، ل بدلا من (ن) ، لحصلنا على :—

(ق ⊃ ل) . ~ق : ⊃ : ~ل

وهى الصيغة الثالثة غير الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية . وعلى ذلك فالصيغة الأصلية لا تعبر عن استدلال صحيح[1] .

٤ — وفى الصيغة الرابعة : (~م ⊃ ن) . ن : ⊃ : ~م

لو وضعنا ق بدلا من (~م) ، ل بدلا من (ن) لحصلنا على :—

(ق ⊃ ل) . ل : ⊃ : ق

وهى الصيغة الثانية غير الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية . وعلى ذلك فالصيغة الأصلية معبرة عن إستدلال غير صحيح[2] .

٥ — وفى الصيغة الخامسة :

(~م ⊃ ~ن) . ~ن : ⊃ : م

لو وضعنا ق بدلا من (~م) ، ل بدلا من (~ن) لحصلنا على :—

(ق ⊃ ل) . ل : ⊃ : ~ق

---

(١) والخطأ هنا راجع إلى إقامة اللزوم على نفى المقدم .

(٢) والخطأ هنا راجع إلى إقامة اللزوم على إثبات التالى .

وهذه الصيغة ليست واحدة من الصيغ الأربع السابقة الأساسية ، لكنها صيغة غير صحيحة يقينا لأن المقدم فيها وهو (ق ⊃ ل) لا يستلزم أن تكون (ـ ق) ، ولا أن تكون كذلك (ق) .

(ب) إستدلالات قائمة على الفصل (الجمع) المنطقى :

أولا — الفصل الضعيف

١ — ـ (ق ٧ ل) ≡ ـ ق . ـ ل .

وتسمى عادة هذه الصيغة بإسم قانون نفى الفصل Negation of a dis junction كما تعرف أحياناً بأحد قانونى دى مورجن . وتقرأ : إن نفى القضية الفصلية ، مكافئ للقضية العطفيه التى تكون القضايا المعطوفة فيها ، هى سوالب القضايا المفصولة .

أو تقرأ : إن كذب القول بأن تكون « ق » صادقة أو « ل » صادقة ، أو هما معاً صادقتين ، يكافئ قولنا أن تكون كل من القضيتين ق ، ل كاذبتين معاً . ويمكن توضيح ذلك بشكل كما يلى :

إن القضية الفصلية (ق ٧ ل) تعنى :

١ — أن ق ، ل صادقتان معاً .

٢ — أو أن إحداها فقط صادقة والأخرى كاذبة .

فلو كانت القضية الفصلية كاذبة ، ترتب على ذلك كذب الاحتمالين السابقين ، والقول الوحيد الذى يكذب الاحتمالين السابقين هو الذى ينص على كذب القضيتين ق ، ل فى وقت واحد ، أى (ـ ق . ـ ل) .

٢ — (ق ∨ ل) . ~ ق : ⊃ : ل .

وتقرأ : إن القول بصدق إحـدى القضيتين ق ، ل على الأقل ، والقول بأن القضية ق كاذبة ، كل هذا يلزم عنه أن تـكون القضية ل صادقة .

وهو إستدلال لزومى صحيح ، لأن المقدم فيه يتـكون من مقدمتين ، إحـداها فصلية (ق ∨ ل) وتفيد صدق « ق » أو صدق « ل » أو صدقهما معاً . والثانية تفيد كذب ق . إذن فلابد وأن تـكون ل صادقة . ومن ثم فالنتيجة تلزم لزوماً طبيعياً وضرورياً عن المقدمات ، طالما أن نفى أحد البديلين يترتب عليه بالضرورة صدق البديل الآخر . وهكذا لو أردنا أن نستدل على صدق قضية ما مثل « ل » ، جعلناها أحد البديلين فى قضية فصلية ، وأضفنا إلى ذلك كذب البديل الآخر .

٣ — (ق ∨ ل) . ~ ل : ⊃ : ق

وتقرأ : إن القول بصدق إحدى القضيتين ق ، ل والقول فى الوقت نفسه بأن القضية ل كاذبة ، كل هذا يلزم عنه أن تـكون القضية ق صادقة .

وهذا إستدلال لزومى صحيح ، وتتضح صحته من الطريقة التى إتبعت فى الصيغة السابقة .

٤ — (ق ∨ ل) . ق : ⊃ : ~ ل .

وتقرأ : إن القول بأن إحدى القضيتين ق ، ل صادقة على الأقل ، والقول فى الوقت نفسه بأن القضية ق صادقة ، كل هذا يلزم عنه أن تـكون القضية « ل » كاذبة .

وهذا إستدلال لزومى غير صحيح ، لأن القضية الفصليه (ق ∨ ل) تعنى صدق واحدة على الأقل من القضيتين البديلتين أو المنفصلتين ق ، ل مع إمكان صدقهما

معاً ، وعلى ذلك فإننا نستطيع — من صدق القضيتين البديلتين — أن نستنتج صدق الأخرى أو كذبها .

وعلى ذلك فان كذب ل ليس بالنتيجة الضرورية ، بل هى محتملة فقط ، لأنها تكون صادقة . وهكذا فأننا نستنتج أيضاً عدم صحة الاستدلال الذى تعبر عنه الصيغة التالية :—

(ق ∨ ل) . ق : ⊃ : ل .

٥ — (ق ∨ ل) . ل : ⊃ : ~ ق

وتقرأ : إن القول بصدق إحدى القضيتين ق ، ل ، ثم القول بأن القضية ق صادقة فعلا ، لا يلزم عنه كذب ق لأنها قد تكون صادقة أو كاذبة ، ومن ثم فان هذه الصيغة لا تعبر عن إستدلال لزومى صحيح .

كما يمكننا أن نستنتج أيضاً ، للسبب المذكور فى الصيغة السابقة عدم صحة الاستدلال الذى تعبر عنه الصيغة التالية :

(ق ∨ ل) . ل : ⊃ : ق

وتلخيصاً لما سبق يمكننا القول بأن أى إستدلال يأخذ صورة مماثلة لإحدى الصيغ الثلاث الأولى ، يكون إستدلالا صحيحاً . وأى إستدلال يأخذ صورة مماثلة لإحدى الصيغتين الأخيرتين يكون إستدلالا غير صحيح .

وهكذا فنحن نستطيع معرفة ما إذا كان الإستدلال صحيحاً أو غير صحيح ، حين نقارنه بصيغ الإستدلالات الصحيحة . ولنأخذ — لزيادة الإيضاح — المثال التالى :—

(هذا الراسب الأسود يحتوى على سلفات الزئبق أو سلفات الرصاص . لكن التجربة أثبتت أنه خال من الرصاص . إذن فهو يحتوى على الزئبق) .

معرفة ما إذا كان هذا الإستدلال صحيحاً أم لا ، نضع بدلا من العبارة (هذا الراسب الأسود يحتـــوى على سلفات الزئبق) الرمز « ق » ، وبدلا من العبارة (وهو يحتوى على سلفات الرصاص) الرمز « ل » ، ومن ثم تسكون صورة العبارة كلها على النحو الآتي :

(ق v ل) . ل : ⊃ : ق

وهى صيغة تدل على إستدلال صحيح .

ثانياً : الفصل القوى

مثل :—

١ — (ق (v) ل) . ~ ق : ⊃ : ل

٢ — (ق (v) ل) . ~ ل : ⊃ : ق

٣ — (ق (v) ل) . ق : ⊃ : ل

٤ — (ق (v) ل) . ل : ⊃ : ق

وهى جميعاً إستدلالات صحيحة .

(ج) إستدلالات قائمـة على التنافر :

وسنذكر فى هذا الصدد أربع صيغ أساسية هى :—

١ — ~ (ق . ل) . ق : ⊃ : ~ ل

وتقرأ : إن القول بإستحالة صـــدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بصدق القضية ق فى الوقت نفسه ، يلزم عنه أن تـكون القضية ل كاذبة . وهى صيغة تعبر

عن إستدلال صحيح لأن المقدمة الأولى فى هذه الصيغة تقرر عدم إمكان صدق القضيتين ق ، ل معاً . فى حين تقرر المقدمة الثانية فيها (وهى ق) أن إحدى القضيتين وهى « ق » صادقة . وعلى ذلك تكون الثانية كاذبة . وهى نتيجة تلزم عن المقدمتين . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — ~(ق . ل) . ل : ⊃ : ~ق

وتقرأ : إن القـــول بإستحالة صدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بصدق القضية ل فى الوقت نفسه ، يلزم عنه أن تكون القضية ق كاذبة . وهى صيغة تعبر عن إستدلال صحيح لنفس السبب السابق .

٣ — ~(ق . ل) . ~ق : ⊃ : ل

وتقرأ : إن القول بعدم إمكان صدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بكذب القضية ق ، يلزم عنه أن تكون ل صادقة .

وهى صيغة تعبر عن إستدلال غير صحيح لأن المقدمة الأولى تفيد عدم صدق القضيتين ق ، ل معاً ، لكنها لا تفيـــد عدم كذبهما معاً . أى لو كانت إحداها صادقة للزم عن ذلك كذب الأخرى ، أما إذا كانت إحداها كاذبة (~ق) ، لما لزم عن هـذا بالضرورة كذب الأخرى ولا صدقها ، فهى قد تكون صادقة وقد تكون أيضاً كاذبة . ومن ثم يمكننا كذلك أن نكتب الصيغة التالية :

~(ق . ل) . ~ق : ⊃ : ~ل

التى تعبر بدورها عن إستدلال غير صحيح .

٤ — ~(ق . ل) . ~ل : ⊃ : ق

وهى صيغة تعبر عن إستدلال غير صحيح لنفس السبب السابق ، ومن ثم يمكننا كذلك أن نكتب الصيغة التالية :—

~(ق . ل) . ~ل : ⊃ : ~ق

التى تعبر عن إستدلال غير صحيح هى الأخرى .

وتلخيصاً لما سبق نقول أن أى استدلال يأخذ صورة مشابهة لإحدى الصيغتين الأولتين (١ ، ٢) يكون صحيحاً ، وأى استدلال يأخذ صورة مشابهة لاحدى الصيغتين الأخيرتين (٣ ، ٤) يكون غير صحيح .

(ى) استدلالات قائمة على التكافؤ :

١ — التكافؤ الخاص باللزوم : مثل القول بأن (ق ⊃ ل) تكافىء (~ل ⊃ ~ق) أى أن : (ق ⊃ ل) ≡ (~ل ⊃ ~ق)

٢ — التكافؤ بين اللزوم والفصل :

مثل :— (ق ⊃ ل) ≡ (~ق v ل)

وتقرأ : إن القول بان القضية ق تستلزم القضية ل ، يكافىء القول بان تكون ق كاذبة أو تكون ل صادقة . وبعبارة أخرى فإن اللزوم بين قضيتين يكافىء الفصل بين نفى المقدم ، وبين التالى . وقد يتضح معنى هذا التكافؤ لو وضعنا بدلا من المتغيرات قضايا ذات معنى محدد وذلك كما يلى : لو وضعنا بدلا من ق العبارة (الطالب مجتهد) ، وبدلا من ل (الطالب نجح فى الامتحان) ، إستطعنا أن نترجم هذه الصيغة الرمزية إلى العبارة التالية :

إن القول « بانه إذا كان الطالب مجتهداً ، نجح فى الامتحان» ، يكافىء القول بان « الطالب إما أنه ليس مجتهداً ، أو أنه ناجح فى الامتحان » .

٣ — التكافؤ بين اللزوم والتنافر :

مثل :— (ق ⊃ ل) ≡ ـ (ق . ـ ل)

لأننا حين نقول : « إذا كانت ق صادقة ، ترتب على ذلك صدق ل » إنما نقول « إذا كانت ق صادقة فإن ل لا يمكن أن تكون كاذبة » ، أو نقول « إنه من الكذب القول بصدق ق وكذب ل ».

قائمة المتكافئات :

هكذا أصبح فى إستطاعتنا أن نستدل على صدق قضايا مكافئة لقضية اللزوم ، وذلك باستخدام النفى والفصل والتنافر ، بحيث يمكننا أن نضع القضية الأصلية ، والقضايا الثلاث المكافئة لها فى قائمة واحدة على النحو الآتى :—

(ق ⊃ ل) ≡ (ـ ل ⊃ ـ ق) ≡ (ـ ق v ل) ≡ ـ (ق . ـ ل) .

وما فائدة هذه القائمة ؟ فائدتها تتضح حين تكون لدينا قضية ما تأخذ صورة إحدى هذه الصيغ المتكافئة ، فإننا نستطيع أن نستدل على صحة قضايا أخرى تأخذ أى صورة من صور الصيغ الأخرى المكافئة لها ، ولنأخذ لذلك مثلا العبارة التالية ، ولنحاول أن نجد القضايا المكافئه لها :

(إنه إما أن يكون حسن الحظ ، أو أنه سوف يخسر المباراة)

ولنرمز للعبارة (إنه حسن الحظ) بالرمز « م » ، وللعبارة (إنه سوف يخسر المباراة) بالرمز « ن » . بذلك تتحول العبارة السابقة إلى الصيغة الرمزية التالية :—

(م v ن) .

الآن إذا أردنا أن نحول هذه العبارة الفصلية إلى ما يكافئها من صيغ أخرى فسوف نختار من قائمة المتكافئات السابقة القضية الفصلية (ـ ق v ل)، ثم نضع فيها بدلا من « ـ ق » الرمز « م »، وبدلا من « ل » ، الرمز « ن » وبذلك نحصل على (م v ن) . ثم نقوم بمثل هذا الاستبدال بالنسبة لبقية المتكافئات فنحصل على :—

(ـ م ⊃ ن) ≡ (ـ ن ⊃ ل) ≡ (م v ن) ≡ ـ(ـ م . ـ ن).

وعلى ذلك فالقضايا الثلاث المكافئة لقضية الفصل هي :—

١ — (ـ م ⊃ ن) ، أى : « إذا لم يكن حسن الحظ ، فسوف يخسر المباراة » .

٢ — (ـ ن ⊃ م) ، أى : « إذا لم يخسر المباراة ، فهو حسن الحظ » .

٣ — ـ (ـ م . ـ ن) ، أى : « أنه لا يمكن أن يكون سيء الحظ ، ولا يخسر المباراة في وقت واحد » .

وهي جميعاً تكافىء القضية الأصلية بمعنى أنها جميعاً تقول نفس الشيء الذى تقوله القضية الأصلية ، وهكذا نستطيع أن نستدل على صدق القضية الأصلية ، بناء على معرفتنا بصدق أية واحدة من هذا القضايا المكافئة ، أو العكس .

ومن الطبيعي أننا قد لا نحتاج دائماً إلى ذكر جميع القضايا المكافئة لقضية معينة ، بل قد لا نحتاج إلا لواحدة فقط ، ولتكن هي القضية اللزومية المكافئة ، في هذه الحالة لن نقوم بإبدال الرموز الخاصة إلا بالتعبير الأول (أو الثاني) فقط . هنا نجد أن القضية اللزومية المكافئة للتعبير (م v ن) هي :

إما : ١ — (~م ⊃ ن)

أو : ٢ — (~ن ⊃ م)   وهى قضية اللزوم العكسى لها .

وهنا نلاحظ : أن قضية الفصل تكافئ قضية اللزوم التى تكون مقدمها نفياً لأحد البديلين .

ولنأخذ مثلا آخر : لنفرض أن لدينا التعبير الرمزى التالى : ـــ

~ (م . ن)

فإننا نلاحظ أن القضية المناظرة لها من حيث الصياغة ـــ فى القائمة سالفة الذكر ـــ هى :

~ (ق . ~ل) .

ولذا فنحن لو وضعنا فيها الرمز « م » بدلا من « ق » ، والرمز « ن » بدلا من « ~ل » لحصلنا على :

(م ⊃ ن) ≡ (ن ⊃ ~م) ≡ (~م ∨ ~ن) ≡ ~(م . ن) .

ومن ثم تكون القضايا المتكافئة مع قضيتنا الأصلية هى : ـ

(١) (م ⊃ ~ن)

(٢) (ن ⊃ ~م)

(٣) (~م ∨ ~ن) .

التكافؤ بين صور الاستدلال الصحيح :

إننا فى المنطق الرمزى المعاصر لا نستدل فقط على صدق قضية ما ، بناء على صدق قضية أخرى مكافئة لها — على النحو سالف الذكر — بل نستدل كذلك على صحة إستدلال ما ، بناء على صحة إستدلال آخر صحيح مكافىء له فى الصورة والصياغة . فالنتيجة التى نحصل عليها من أنواع التكافؤ السابقة ، هى أن صور الاستدلال الصحيح التى ذكرناها ، كلها متكافئة ، لأننا لو وضعنا مثلا ، قضية اللزوم المكافئة للقضية الفصلية أو لقضية التنافر بدلا من أى منهما فى الصيغ التى تحتويها ، لحصلنا على واحدة من صورتى اللزوم الصحيح ، كما أننا لو وضعنا قضية اللزوم بدلا من قضية لزومها العكسى ، فإننا نجد أن صورتى اللزوم تنتهيان إلى صيغة واحدة ، كما رأينا من قبل . ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتى :

(نحن نعلم أن هذا المحلول يحتوى على المنجنيز أو الزنك ، وقد أثبتت التجربة أنه خال من المنجنيز . ومن ثم فهو لا بد وأن يحتوى على الزنك) .

أولا : فإذا ما رمزنا إلى العبارة (هذا المحلول يحتوى على المنجنيز) بالرمز « م » ، وإلى العبارة (وهذا المحلول يحتوى على الزنك) بالرمز « و » لحصلنا على الصيغة الاستدلالية التالية : ـ

(م ٧ و) . ـ م : ⊃ : و

وهى كما نعرف صيغة استدلالية فصلية صحيحة .

ثانيا : الآن نضع بدلا من (م ٧ و) عبارة اللزوم المكافئة لها وهى : ـ

(ـ م ⊃ و)

ومن ثم تصبح الصيغة الاستدلالية على النحو الآتى : ـ

(~م ⊃ و) . ~ م : ⊃ : و

وهى صيغة إستدلالية صحيحة . ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا « ق » بدلا من « ~م » ووضعنا « ل » بدلا من « و » ، فنحصل على :

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

وهى قاعدة الاثبات بالاثبات (أو الوضع بالوضع) Modus Ponendo Ponens التى تعبر عن استدلال لزومى صحيح كما ذكرنا من قبل .

هذا ويمكننا بالمثل أن نضع بدلا من (م ٧ و) فى المثال السابق ، بقية الصيغ المكافئة لها فى قائمة التكافؤ السابقة .

وسنعرض فيما يلى لكيفية الاستدلال على صحة بعض الصيغ الأكثر تركيبا ، وذلك باستخدام ما يسمى بالمتسلسلة اللزومية Implicative series أو متسلسلة اللزوم .

متسلسلة اللزوم :

وتأخذ عادة الصيغة العامة الآتية : ـ

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : ق ⊃ م

وهى صيغة إستدلالية صحيحة . لأنها تستو فى الشروط الأساسية اللازم توفرها فى أى متسلسلة لزومية صحيحة وهى : ـ

١ ــ أن المقدم (ق) فى المقدمة الأولى (ق ⊃ ل) ، هو المقدم فى النتيجة .

٢ ــ أن التالى (م) فى المقدمة الثانية (ل ⊃ م) ، هو التالى فى النتيجة .

٣ — أن القضية الأخرى فى المقدمتين ، أى التالى فى المقدمة الأولى ، والمقدم فى المقدمة الثانية هى قضية واحدة فى المقدمتين معاً ، أى « ل » . ومن الضرورى أن تكون القضية الأخرى فى المقدمتين واحدة ، وإلا لم يكن باستطاعتنا أن نتجاوزها لكى نربط بين القضيتين الأولى والأخيرة .

وعلى ذلك فكل إستدلال يلتزم بهذه الشروط الثلاثة أو يستوفيها ، يكون إستدلالا صحيحاً .

وفيما يلى أمثلة على بعض الاستدلالات الصحيحة التى تكون من هذا النوع :

<u>أولا :</u> (ن ⊃ م) . (و ⊃ ~م) : ⊃ : (و ⊃ ~ن)

هذه الصيغة تعبر عن إستدلال صحيح ، ولكى نثبت ذلك علينا أن نردها إلى الصورة التى تستوفى الشروط السابقة . وسنتبع فى ذلك الخطوات الآتية : —

١ — لكى يكون المقدم فى النتيجة هو المقدم فى المقدمة الأولى ، نقوم بتغيير وضع المقدمتين فنضع الأولى مكان الثانية ، والثانية مكان الأولى ، باستخدام قانون التبادل . وكما إننا نقول فى قانون التبادل الخاص بالضرب أن (ق . ل ≡ ل . ق) ، فإننا نكتب فى هذه الحالة :

(ن ⊃ م) . (و ⊃ ~م) ≡ (و ⊃ ~م) . (ن ⊃ م)

ومن ثم تصبح الصيغة الأصلية على النحو الآتى : —

(و ⊃ ~م) . (ن ⊃ م) : ⊃ : (و ⊃ ~ن)

٢ — ثم بعد ذلك لكى نحصل على قضية مشتركة بين المقدمتين ــ تساعدنا على الاستمرار فى الاستدلال فإننا نضع بدلا من المقدمة الثانية ــ وهى (ن ⊃ م) قضية اللزوم العكسى المكافئة لها ، وهى (~م ⊃ ~ن) ومن ثم نحصل على :—

(و ⊃ ~م) . (~م ⊃ ~ن) : ⊃ : و ⊃ ~ ن

٣ — فإذا ما وضعنا بعد ذلك فى هـذه الصيغة الجديدة ، المتغيرات ق ، ل ، م بدلا من و ، م ، ن على الترتيب ، لحصلنا على :ـ

(ق ⊃ ~ل) . (~ل ⊃ ~م) : ⊃ : ق ⊃ ~ م

وهى صورة لمتسلسلة لزومية صحيحة تستوفى الشروط الثلاثة السابقة . وبما أن هـذه الصيغة الإستدلالية الأخيرة — الصحيحة — تـكافىء الصيغة الأولى بناء على ما اتخذناه من خطوات سابقة ، فإنه يلزم عن هـــذا أن تـكون الصيغة الأولى الأصلية ، معبرة عن إستدلال صحيح ، أى تـكون المقدمتان فيها مستلزمتين النتيجة بالضرورة .

ثانيــاً :

وأحياناً تـكون متسلسلة اللزوم من أكثر من مقدمتين ، إذ أن عدد المقدمات فى هذه الحالة لا يغير من أمر الإستدلال فى شىء ، طالما أن الرابطة بينها متصلة غير مقطوعة . فإذا كانت لدينا قضية مثـل « ل » تلزم عن قضية أخرى ، وتلك عن قضية ثالثة ، وهكذا حتى نصل أخيراً إلى المقدم الأول فى اللزوم ، مثل القضية «ق» ، فإننا نقول دائماً أن القضية « ل » تلزم عن القضية « ق » . ولتوضيح ذلك ناخذ الصورة العامة لمتسلسلة اللزوم وهى :

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ق ⊃ م)

ثم نضيف إليها مقدمة ثالثة ، فنحصل على :ـ

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) . (م ⊃ ن) : ⊃ : (ق ⊃ ن)

وهى متسلسلة لزومية تدل على استدلال صحيح طالما أن النتيجة تلزم لزوماً طبيعياً وضرورياً عن المقدمات .

ثالثاً :

كما تأخذ أحياناً متسلسلة اللزوم صورة أخرى مثل :—

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) . ∼م : ⊃ : ∼ق

ولا ريب أن هـذه الصيغة تعبر عن إستدلال صحيح ، ويمكن توضيح ذلك كما يلي :—

١ — أن النتيجة التي تلزم عن المقدمتين الأولى والثانية هى : (ق ⊃ م) وذلك لأن :

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : ق ⊃ م .

٢ — ثم نقوم بعد ذلك بتكوين قضية عطفية من هـذه النتيجة (ق ⊃ م) ، ومن المقدمة الثالثة في الصيغة الأصلية وهى (∼م) . أو بعبارة أخرى نضرب نتيجة الصيغة السابقة × (∼م) ، فنحصل على (∼ق) ، وذلك لأن :

(ق ⊃ م) . ∼م : ⊃ : ∼ق .

تبعاً للقاعدة اللزومية القائلة بأن نفى تالى قضية اللزوم يستلزم نفى المقدم . أما لو أخذنا الصيغة الاستدلالية التالية مثلا :—

(ق ⊃ ل) . (∼ل ⊃ ∼م) : ⊃ : (ق ⊃ م)

فسرعان ما نلاحظ أنها لا تعبر عن إستدلال صحيح ، لأن هذه الصيغة ، صيغه

لزوميـــة والتسلسلة اللزومية الصحيحة هى التى تستوفى الشروط الثلاثة السابق ذكرها ، بحيث إذا لم تستوف أى شرط منها ، لن تكون الصيغة معبرة عن إستدلال صحيح . وهذه الصيغة السابقة لا تستوف تلك الشروط ، لأننا مهما حاولنا ترتيب قضايا اللزوم فيها ، لن نجد قضية مشتركة تساعدنا على الربط بين القضيتين الأخريين ربطاً لزومياً . ومن ثم فالاستدلال غير صحيح .

رابعـــاً :

كما تحتوى متسلسلة اللزوم أحياناً على الفصل (أو الجمع المنطقى) . ولكى نوضح ذلك علينا أن نذكر أولا :

(أ) إن قضية اللزوم تكافىء قضية الفصل التى يكون أحد البديلين فيها نافيا المقدم فى قضية اللزوم ، أى أن :—

(ق ⊃ ل) ≡ ~ق ∨ ل .

(ب) وبالعكس فقضية الفصل تكافىء قضية اللزوم التى يكون المقدم فيها نافيا لأحد البديلين ، أى أن :

(ق ∨ ل) ≡ ~ق ⊃ ل .

أو : (ق ∨ ل) ≡ ~ل ⊃ ق .

ولنفرض الآن أن لدينا الصيغة التالية :—

(~م ∨ ~ن) . (ن ∨ و) : ⊃ : (~م ∨ و)

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت تعبر عن إستدلال صحيح أم لا ، فإننا نلجأ مثلا إلى ما يأتى :

١ — نضع بدلا من قضايا الفصل فى هذه الصيغة ، قضايا اللزوم المكافئة لها ، كما يلى :—

∴ (~م ٧ ~ن) ≡ (م ⊃ ~ن)

، ∴ (ن ٧ و) ≡ (~ن ⊃ و)

، ∴ (~م ٧ و) ≡ (م ⊃ و)

∴ فنحن نحصل على الصيغة التالية :—

(م ⊃ ~ن) . (~ن ⊃ و) : ⊃ : (م ⊃ و)

٢ — فإذا ما وضعنا متغيرات القضايا ى ، ل ، م . بدلا من م ، ~ن ، ، و، على الترتيب لحصلنا على للتسلسلة اللزومية الصحيحة التالية :—

(ى ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ى ⊃ م)

وهكذا نكون قد إستدللنا على صحة متسلسلة لزومية تحتوى على قضايا فصلية بإستخدام قضايا لزوم مكافئة لها .

<u>خامساً :</u>

وقد تحتوى مسلسلة اللزوم أحياناً على قضايا معبرة عن تنافر . ولذا فاننا عادة ما نلجأ فى الإستدلال على صحتها إلى استخدام قضايا لزومية مكافئة للتنافر . وعلينا أولا أن نتذكر :

(ا) أن قضية اللزوم تكون مكافئة للتنافر الذى يكون أحد حدوده نفياً لتالى قضية اللزوم ، أى أن :

(ق ⊃ ل) ≡ ~ (ق . ~ ل)

(ب) وبالعكس ، فقضية التنافر تكون مكافئة لقضية اللزوم التي ينفى فيها التالى ، واحدة من قضايا التنافر ، أى أن :ـ

~ (ق . ل) ≡ (ق ⊃ ~ ل)

ولنفرض الآن أن لدينا الصيغة التالية :

~ (ل . م) . (م v ن) : ⊃ : (ل ⊃ ن)

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن إستدلال لزومى صحيح أم لا ، فإننا نتبع مثلا الخطوات التالية :ـ

١ — نضع بدلا من قضية التنافر « ~ (ل . م) » ، قضية اللزوم المكافئة لها ، وهى (ل ⊃ ~ م) .

٢ — نضع بدلا من القضية الفصلية (م v ن) ، قضية اللزوم المكافئة لها ، وهى (~ م ⊃ ن) . ومن ثم فإننا نحصل على الصيغة اللزومية التالية :ـ

(ل ⊃ ~ م) . (~ م ⊃ ن) : ⊃ : (ل ⊃ ن)

٣ — فإذا ماوضعنا متغيرات القضايا : ق ، ل ، م بدلا من « ل » ، « ~ م » ، « ن » على الترتيب ، لحصلنا على المتسلسلة اللزومية الصحيحة التالية :ـ

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ق ⊃ م)

وهكذا نكون قد إستدللنا على صحة متساوية لزومية تحتوى على قضية فصلية ، وقضية تنافر ، بإستخدام قضايا لزوم مكافئة لها .

هذا ولايفوتنا بعد ذلك أن نعرض التعبير الرمزى لبعض صور الإستدلال القديمة ، وذلك على النحو الآتى :—

أولا : الاستدلال بتقابل القضايا :

(ا) القضايا المتناقضة : مثل ق ، ~ق . وبما أن حكم القضيتين المتناقضتين هو أنهما تصدقان معاً ولا تكذبان معاً ، فأنهما — بعبارة أخرى — تتنافران ، ولذا فأننا نكتب :

~ (ق . ~ق)

وتقرأ : إنه من الكذب القول بصدق القضية ق وكذبها فى الوقت نفسه .

كما يعبر عن التناقض كذلك — كما ذكرنا من قبل — بإسم قانون الوسط المرفوع الذى ينص على أنه إما أن تكون قضية ما صادقة أو أن تكون القضية النافية لها صادقة . ونحن عادة ما نرمز لهذا القانون بقضية الفصل التالية :

ق v ~ق .

فإذا كتبنا الصيغتين معاً ، إستطعنا القول بأنه : إذا كانت القضيتان « ق » ، « ~ق » متناقضتين ، كانت إذن :

~(ق . ~ق) . (ق v ~ق) .

↓ لا تصدقان معاً ↓ إحداها صادقة ، فلا تكذبان معاً

وباختصار ، فالقضيتان فى حالة فصل قوى ، بحيث أن واحدة فقط منهما تكون

صادقة ، فهما لا تصدقان معاً ، وتكون إحداهما على الأقل صادقة ، ومن ثم فهما لا تكذبان معاً . وهكذا يمكننا الإستدلال على صدق أو كذب أية قضية ، لو عرفنا مدى صدق أو كذب القضية المتناقضة معها .

(ب) القضايا المتضادة :

القضيتان المتضادتان ، لا تصدقان معاً ، وقد تكذبان معاً ، لكننا لا نقول شيئاً عن كذبهما ، بل نتوقف عن الحكم وبالتالي عن الاستدلال فى حالة الكذب . وبعبارة أخرى نقول فى المنطق الحديث أن القضيتين المتضادتين متنافرتان ، لكنهما ليستا فى حالة فصل . فإذا كانت هناك قضيتان متضادتان مثل « ن » ، « ل » ، عبرنا عن التضاد بينهما على النحو الآتى :—

~ (ن · ل)

ومن الواضح أن هذه الصيغة تعبر عن التنافر . وهكذا فإننا نفرق بين التعبير عن التضاد والتعبير عن التناقض ، بأن الصيغة المعبرة عن التناقض تحتوى على تنافر وفصل ، أما الصيغه المعبرة عن التضاد فلا تحتوى إلا على تنافر فقط .

(جـ) القضايا الداخلة تحت التضاد :

والقضيتان الداخلتان تحت التضاد ، لأنهما لا تكذبان معاً ، فلابد وأن تعبرا عن حالة الفصل إذا طالما أنهما لا تكذبان معاً ، فهناك ضرورة لصدق إحداهما ، مع إحتمال أو إمكان صدقهما معاً ، وهذا فصل ضعيف . وبصفة عامة لو كانت لدينا قضية هى « ن » ، وكانت القضية الداخلة معها تحت التضاد هى « ل » ، لما أمكننا أن نكتب إلا :

ن v ل

مثل : (ں) هو ليس بالمنزل

(لَ) هو فى الكلية

فإحدى هاتين القضيتين على الأقل تكون صادقة فى حالة الفصل الضعيف ، مع إمكان صدقهما معاً . هكذا يتم التعبير عن الدخول تحت التضاد بإستخدام شرط واحد من شرطى التناقض وهو الفصل . كما يتم التعبير عن التضاد بإستخدام الشرط الآخر فقط ، وهو التنافر . أما التناقض الذى يتم التعبير عنه بالشرطين معاً (الفصل والتنافر) فهو أقوى علاقة للتقابل بين القضايا(١) .

ثانياً : الاستدلال بواسطة الإحراج :

والإحراج Dilemma نوع من البرهان ، ولذا فقد إهتم به المنطق الصورى ، وهو يمكن أن يأخذ إحدى الصور الآتية :—

١ — (ں ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ں ∨ م) : ⊃ : ل ∨ ن

وتسمى هذه الصيغة بالاحراج البنائى المركب Complex Constructive Dilemma وتقرأ : لو كانت ں تستلزم ل ، وكانت م تستلزم ن ، وكانت إحدى القضيتين « ں » أو « م » صادقة ، فإنه يلزم عن ذلك كله أن تكون واحدة من القضيتين « ل » أو « ن » صادقة .

---

(١) ولقد حرصت على ذكر هذه الأنواع الثلاثة من التقابل هنا ، طالما أن كلا من التضاد والدخول تحت التضاد يعبر عن أحد شرطى التناقض . وسوف نذكر فى القائمة التى أوردناها فيما بعد الصيغ الرمزية التى نعبر بها عن التداخل .

٢ — (ق ⊃ ل) . (م ⊃ ل) . (ق ∨ م) : ⊃ : ل

وتسمى هذه الصيغة بالاحراج البنائى البسيط Simple Constructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ق » تستلزم « ل » ، وكانت « م » تستلزم « ل » ، وكانت « ق » صادقة أو « م » صادقة ، ترتب على هذا بالضرورة صدق « ل » .

٣ — (ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (~ل ∨ ~ن) : ⊃ : ~ق ∨ ~م

وتسمى هذه الصيغة بالإحراج الهدمى المركب Complex Destructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ق » تستلزم « ل » . وكانت « م » تستلزم « ن » ، وكانت « ل » كاذبة أو « ن » كاذبة ، ترتب على هـــذا بالضرورة أن تـكون « ق » كاذبة أو « م » كاذبة .

٤ — (ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م) . (~ل ∨ ~م) : ⊃ : ~ق

وتسمى هذه الصيغة بالإحراج الهدمى البسيط Simple Destructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ق » تستلزم « ل » ، وكانت « ق » تستـلزم « م » ، وكانت « ل » كاذبة أو « م » كاذبة ، ترتب علـى هـــذا بالضرورة كذب القضية « ق » .

كل هذه الصيغ الأربع ، هى صور أو صيغ لتسلسلات لزومية صحيحة ، ومن ثم فإن أى إستدلال يأخـذ صورة أى واحدة من هذه الصيغ ، يـكون بدوره إستدلالا صحيحا .

ولتوضيح ذلك نأخذ بعض الأمثلة : —

(ا) لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(م ⊃ ن) . (~م ⊃ و) . (م v ~م) :⊃: (ن v و) .

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن إستدلال صحيح أم لا ، فإننا نضع المتغيرات التالية : « ه » ، « ل » ، « م » ، « ن » بدلا من « م » ، « ن » ، « ~م » ، « و » على الترتيب ، فنحصل على : —

(ه ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ه v م) :⊃: ل v ن

وهى صيغة الاحراج البنائى المركب التى تعبر عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فالاستدلال الأصلى صحيح .

(ب) ولنأخذ مثالا آخر : لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(ن ⊃ و) . (~ن ⊃ و) . (ن v ~ن) :⊃: و

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح أم لا ، فإننا نضع المتغيرات التالية : « ه » ، « ل » ، « م » بدلا من « ن » ، « و » ، « ~ن » على الترتيب فنحصل على : —

(ه ⊃ ل) . (م ⊃ ل) . (ه v م) :⊃: ل

وهى صيغة الاحراج البنائى المركب التى تعبر عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فالاستدلال الأصلى صحيح .

(ح) حينما ينفى الاحراج ، بدلا من أن يؤكد أو يثبت قضية أو أكثر فى المقدمات ، فإنه يسمى فى هذه الحالة بالاحراج الهدمى ، ولنأخذ المثال الآتى تعبيرا عن ذلك : —

(ل ⊃ م) . (ن ⊃ و) . (~م ٧ ~و) : ⊃ : (~ل ٧ ~ن)

فهل هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح أم لا ؟ أو بعبارة أخرى هل تلزم النتيجة فى هذه الصيغة بالضرورة عن المقدمات فيها ؟ للأجابة عن ذلك نقوم بعملية إستبدال مناسبة فنضع متغيرات القضية : ى ، ل ، م ، ن بدلا من ل ، م ، ن ، و ، على الترتيب ، فنحصل على : —

(ى ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (~ل ٧ ~ن) : ⊃ : (~ى ٧ ~م)

وهى صورة الاحراج الهدمى المركب المعبرة عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فالاستدلال الأصلى صحيح .

ملحوظة : الواقع أن أهمية الاحراج الهدمي تتبدى فى إظهاره وجود تنافر بين القضايا ، طالما أن (~ى ٧ ~ل) مكافئة دائما لقضية التنافر «~(ى . ل)» . ونحن فى المثال السابق ، يمكن أن نضع «~(ل . ن)» ، «~(ى . م)» بدلا من قضيتى الفصل ، فنحصل على :

(ى ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . ~(ل . ن) : ⊃ : ~(ى . م)

وهى بدورها صيغة معبرة عن إستدلال صحيح .

(ى) ولنأخذ مثلا آخر ، لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(م ⊃ ن) . (م ⊃ و) ~(ن . و) : ⊃ : ~م

وأردنا أن نعرف مدى صحة الاستدلال الذى تعبر عنه ، فإننا نتبع الخطوات التالية : —

١ — لو وضعنا المتغيرات : ى ، ل ، م ، بدلا من م ، ن ، و ، على الترتيب ، لحصلنا على : —

(ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م) . ~(ل . م) : ⊃ : ~ق

٢ — ثم لو وضعنا فى هذه الصيغة بدلا من قضية التنافر «~(ل . م)» ، قضية الفصل المكافئة لها ، وهى : (~ل ∨ ~م) ، لحصلنا على : —

(ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م) . (~ل ∨ ~م) : ⊃ : ~ق

وهى صورة الاحراج الهدمى البسيط المعبرة عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فالاستدلال الأصلى إستدلال صحيح .

ملحوظة : فى كثير من الاستدلالات التى يمكن ردها إلى الاحراج ، قد يكون من الأيسر علينا لو بحثنا عن صحة الاستدلال لتحويله إلى متسلسلة لزوم . ويكون الأمر يسيرا فى حالة التعبير الرمزى عن الاحراج المركب ، لكن حينما تكون النتيجة قضية بسيطة كما هو الحال فى الاحراج البسيط ، فإنه ينبغى تحويل هذه القضية البسيطة إلى قضية لزوم ، وهذا يتم باستخدام قانونين منطقيين يعبران عن التكافؤ ، هما : —

١ — ق ≡ (~ق ⊃ ق)

٢ — ~ق ≡ (ق ⊃ ~ق)

وهكذا يمكن تحويل « ق » (أو كذلك « ~ق ») دائماً إلى قضية لزوم .

قائمة

بأهم القوانين الأساسية لمنطق القضايا والاستدلالات

الخـــاصة بها (١)

---

١ — قانونا التبادل : Laws of Commutation

ونضيف هنا إلى القانونين السابق ذكرهما عن التبادل فى القائمة السابقة [وهما : (ں . ل ≡ ل . ں) ، (ں v ل ≡ ل v ں)] ، القانونين التاليين :

(أ)   (ں (v) ل) ≡ (ل (v) ں) .

وهو تعبير عن التبادل فى حالة الجمع القوى .

(ب)   (ں ≡ ل) ≡ (ل ≡ ں) .

٢ — قانون اللزوم العكسى Law of counter - implication

(ں ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ ں)

٣ — قانون النفى المزدوج Law of double Negation

ں ≡ ~ ~ ں

---

(١) هذه القائمة مكملة للقائمة السابق ذكرها والتى كانت تحتوى على سبعة قوانين للقضايا ، ولذا فنحن لن نعود إلى تكرار هذه القوانين السبعة .

٤ — قانونا دى مورجن De Morgan's Laws (١)

ويمكن تسميتهما أحيانا بقانونى الازدواج(٢) ، وهما يدلان دلالة واضحة على العلاقة بين القضايا العطفية والقضايا الفصلية . ويمكن التعبير عنهما كما يلى : —

أولا : ـ(ق . ل) ≡ (ـ ق v ـ ل) .

وتقرأ : إن نفى القضية العطفية يكافىء القضية الفصلية التى تتكون من نفى القضيتين المعطوفتين فى القضية العطفية . أو تقرأ : إن كذب القول بأن القضيتين ق ، ل صادقتان معاً ، يكافىء القول بكذب إحدى القضيتين « ق » أو « ل » (أو كذبهما معاً) .

ويمكن التعبير كذلك عن هذا القانون على النحو الآتى : —

(ق . ل) ≡ ـ(ـ ق v ـ ل)

كما يمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

(أ) ـ (ق . ل) ⊃ (ـ ق v ـ ل)

(ب) (ـ ق v ـ ل) ⊃ ـ(ق . ل)

ثانيا : ـ(ق v ل) ≡ (ـ ق . ـ ل)

وتقرأ : إن نفى القضية الفصلية ، يكافىء القضية العطفية التى تتكون من نفى

---

(١) ويمكن الرجوع إلى منطق دى مورجن فى عرض مبسط واضح ، وإلى قوانينه فى كتاب :

Kotarbinski, T. : Lecons sur L'histoire de La Logique pp. 149 - 162

(٢) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 236.

القضيتين المفصولتين فى القضية الفصلية . أو تقرأ : إن كذب القول بأن إحدى القضيتين صادقة (أو صدقهما معاً) ، يكافىء القول بكذب القضيتين ى ، ل معاً .

ويمكن التعبير عن هذا القانون كذلك على النحو الآتى : —

(ى ∨ ل) ≡ ~(~ى · ~ل) .

كما يمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

(ا) ~(ى ∨ ل) ⊃ (~ى · ~ل) .

(ب) (~ى · ~ل) ⊃ ~(ى ∨ ل) .

ومن الواضح أن ما ينطبق فى هذه الحالة على القضية المعبرة عن الفصل الضعيف ، ينطبق كذلك على القضية المعبرة عن الفصل القوى . ولذا يمكننا أن نكتب كذلك :

(ا) ~(ى · ل) ≡ (~ى (∨) ~ل) .

(ب) ~(ى (∨) ل) ≡ (~ى · ~ل) .

٥ — قانونا اللزوم المادى : Laws of Material Implication

وهما عبارتان من عبارات التكافؤ ، وتقدمان لنا تعريفين متميزين للزوم المادى :

أولا : (ى ⊃ ل) ≡ (~ى ∨ ل)

وتقرأ : إن القول بأن ى تستلزم ل ، يكافىء القول بكذب ى أو صدق ل .

ثانيا : (ى ⊃ ل) ≡ ~(ى · ~ل)

وتقرأ : إن القول بأن ى تستلزم ل ، يكافىء القول بكذب أن تكون ى صادقة ،

وأن تكون ل كاذبة فى وقت واحد . ويوضح هذا القانون التكافؤ بين عبارتى اللزوم والتنافر ، ويمكن التعبير عنه أيضاً على النحو الآتى : —

(ق . ~ل = صفر) ≡ (ق ⊃ ل)

٦ — قانون عكس النقيض : Law of Contraposition

ويسمى أحياناً بإسم مبدأ التناقل transposition ، ويتلخص معناه فى القول بأن القضية اللزومية تكون مكافئة للقضية اللزومية التى يكون المقدم فيها نفياً لتالى القضية الأصلية ويكون التالى فيها نفياً لمقدم القضية الأصلية . ويمكن التعبير عنه بالصيغة التالية : —

(ق ⊃ ل) ≡ (~ل ⊃ ~ق) .

٧ — قوانين الاستغراق : Laws of Distribution

(ا) ق . (ل ∨ م) ≡ (ق . ل) ∨ (ق . م) .

(ب) ق ∨ (ل . م) ≡ (ق ∨ ل) . (ق ∨ م) .

(جـ) ق ⊃ (ل . م) ≡ (ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م) .

(د) (ق ∨ ل) ⊃ م ≡ (ق ⊃ م) . (ل ⊃ م) .

٨ — قانونا الإنتاج (أو التصدير) : Laws of Exportation :

(ا) (ق . ل) ⊃ م ≡ ق ⊃ (ل ⊃ م) .

(ب) (ق . ل) ⊃ م ≡ ل ⊃ (ق ⊃ م) .

وهذان القانونان يقرران أنه حيث يكون المقدم فى القضية اللزومية ، هو نفسه قضية عطفية ، فإن هذه القضية اللزومية تكون مكافئة لقضية لزومية يكون التالى فيها هو نفسه قضية لزومية .

٩ — قانونا التكافؤ المادى : Laws of Material Equivalence

أولا : $(\text{ق} \equiv \text{ل}) \equiv (\text{ق} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{ق})$.

وتقرر أن قضية التكافؤ ، تكون مكافئة لعبارة عطفية تعطف قضيتين لزوميتين .
كما يمكن التعبير عن القانون نفسه على النحو الآتى : —

$$(\text{ق} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{ق}) \,.\equiv.\, (\text{ق} \equiv \text{ل}) \,.$$

أو بطريقة اللزوم ، كما يلى : —

(أ) $(\text{ق} \equiv \text{ل}) :\supset: (\text{ق} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{ق})$

وكذلك (ب) $(\text{ق} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{ق}) :\supset: (\text{ق} \equiv \text{ل})$.

ثانيا : $(\text{ق} \equiv \text{ل}) \equiv (\text{ق} \cdot \text{ل}) \vee (\sim\text{ق} \vee \sim\text{ل})$.

وتقرر أن قضية التكافؤ ، تكون مكافئة لعبارة فصلية تتكون من قضيتين منفصلتين أولاهما قضية عطفية ، والأخرى فصلية تنفى القضيتين المفصولتين فيها ،

كما يمكن التعبير عن القانون نفسه على النحو الآتى : —

$$(\text{ق} \cdot \text{ل}) \vee (\sim\text{ق} \vee \sim\text{ل}) \,.\equiv.\, (\text{ق} \equiv \text{ل})$$

أو بطريقة اللزوم على النحو الآتى : —

(أ) $(\text{ق} \equiv \text{ل}) :\supset: (\text{ق} \cdot \text{ل}) \vee (\sim\text{ق} \vee \sim\text{ل})$.

وكذلك (ب) $(\text{ق} \cdot \text{ل}) \vee (\sim\text{ق} \vee \sim\text{ل}) :\supset: (\text{ق} \equiv \text{ل})$.

١٠ — قوانين تتعلق بتقابل القضايا : (خاصة بالتناقض والتداخل)

أولا : بالتناقض

١ — (ق ≡ ~ل) ≡ (~ق ≡ ل)

ويقرأ : إن القول بأن صدق القضية ق ، مكافىء لكذب القضية ل ، يكافىء القول بأن كذب القضية ق ، مكافىء لصدق القضية ل .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

(أ) (ق ≡ ~ل) : ⊃ : (~ق ≡ ل)

(ب) (~ق ≡ ل) : ⊃ : (ق ≡ ~ل) .

هذا وتتضح صحة هذه الصيغ الثلاث للتناقض لو وضعنا بدلا من ق ، ل ، قضيتين إحداهما كلية موجبة A ، والأخرى جزئية سالبة O .

٢ — (ق ⊃ ~ل) ≡ (ل ⊃ ~ق)

وتتضح صحة هذا القانون من أحكام التناقض أيضا ، فلو كانت ق هي A (قضية كلية موجبة) ، وكانت ل هي O (قضية جزئية سالبة) ، لترتب على هذا أن تقرأ الصيغة السابقة : إن القول بأن صدق « ق » A يستلزم كذب (ل) O ، مكافىء لقولنا إن صدق (ل) O يستلزم كذب « ق » A .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

(أ) (ق ⊃ ~ل) : ⊃ : (ل ⊃ ~ق) .

(ب) (ل ⊃ ~ق) : ⊃ : (ق ⊃ ~ل) .

٣ — (~ق ⊃ ل) ≡ (~ل ⊃ ق)

وهو تعبير عن التناقض على النحو الوارد فى القانون السابق (رقم ٢) . ويمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

(ا) (~ق ⊃ ل) : ⊃ : (~ل ⊃ ق) .

(ب) (~ل ⊃ ق) : ⊃ : (~ق ⊃ ل) .

ثانيا : بالتداخل :

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ق)

أى أن القول بان صدق « ق » يستلزم صدق « ل » ، يكافىء القول بأن كذب « ل » يستلزم كذب ق . وهذا ما يتضح من أحكام التداخل . فلو كانت « ق » هى A ، وكانت « ل » هى I (قضية جزئية موجبة) فإننا نقرأ صيغة التكافؤ السابقة على النحو الآتى : إن القول بأنه إذا صدقت « ق » A ، صدقت « ل » I المتداخلة معها ، وليس العكس (وهذا ما يتضح من الشطر أيمن التكافؤ) ، يكافىء القول بأنه إذا كذبت « ل » I ، كذبت « ق » A المتداخلة معها ، وليس العكس . (وهذا ما يتضح من الشطر أيسر التكافؤ) .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزميتين الآتيتين : —

(ا) (ق ⊃ ل) : ⊃ : (~ل ⊃ ~ق) .

(ب) (~ل ⊃ ~ق) : ⊃ : (ق ⊃ ل) .

١١ — أهم القوانين الأساسية للزوم ، وقواعد الاستدلال القائم عليها :

أولا : الصـورة العامة لمتسلسلة اللزوم :

(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م)

وتسمى أحيانا هـــذه الصيغة ، بقانون القياس الشرطى المـزدوج Law of Hypothetical Syllogism[1] ، كما تسمى كذلك أحياناً بإسم مبدأ تعدى اللزوم Principle of Transitivity of Implication[2] .

ثانياً : القواعد الخاصة بالاستدلالات اللزومية :

(أ) قاعدةالإثبات بالإثبات Modus ponendo ponens

أو كما تسمى أحياناً قاعدة الوضع بالوضع :

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل .

(ب) قاعدة الرفـع بالرفع Modus tolendo tollens

(ق ⊃ ل) . ـ ل : ⊃ : ـ ق

(جـ) (ق ⊃ ل) . (ق . م) : ⊃ : (ل . م) .

(د) (ق ⊃ ل) . (ـ ل . م) : ⊃ : (ـ ق م) .

ثالثاً : القواعد الخاصة بالإستدلالات الفصلية :

(أ) (ق ∨ ل) . ـ ق : ⊃ : ل .

---

(١) Tarski, A. : *Introduction to Logic*, P.38.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic. P.39.

وتسمى أحياناً بقاعدة القياس للفصل Disjunctive Syllogism (١) .

(ب)   (ق (٧) ل) . ـق : ⊃ : ل

(ج)   (ق (٧) ل) . ق : ⊃ : ـل

والقاعدتان الأخيرتان خاصتان بالفصل القوى .

رابعاً : القواعد الخاصة بإستدلال الاحراج :

(أ)   (ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ق ٧ م) : ⊃ : ل

وهى خاصة بالاحراج البنائى البسيط .

(ب)   (ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م) . (ـل ٧ ـم) : ⊃ : ـق

وهى خاصة بالاحراج الهدمى البسيط .

(ج)   (ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) (ق ٧ م) : ⊃ : (ل ٧ ن)

وهى خاصة بالاحراج البنائى المركب .

(د)   (ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ـل ٧ ـن) : ⊃ : (ـق ٧ ـم) .

وهى خاصة بالاحراج الهدمى المركب(٢) .

---

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 235

(٢) هذا ويمكن الرجوع إلى قائمة تفصيلية لهذه القوانين الخاصة بحساب القضايا إلى كتاب :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 38.

ثانيا: الاستدلال باستخدام قوائم الصدق

قائمة الصدق Truth - table ، هي الجدول الذى تذكر فيه إمكانات صدق أو كذب قضية بسيطة أو أكثر ، وما يترتب على إتخاذ إجراء أو آخر حيالها ، لتكوين ما يسمى بدالات الصدق ، بغرض التعرف على إمكانات صدقها أو كذبها .

وأبسط صورة لقائمة الصدق هي التي نكونها لقضية واحدة بسيطة ، فلو كانت لدينا القضية « ن » ، فانها — شأنها شأن أية قضية أخرى — تكون إما صادقة أو كاذبة . ولذا فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتي : —

ن
ص
ك

(القائمة رقم ١)

(وسنكتب « ص » للدلالة على حالة صدق القضية ، « ك » للدلالة على حالة كذبها) ومن ثم فإننا نقرأ القائمة السابقة كما يلي : — بالنسبة لأية قضية مثل « ن » ، فهي قد تكون صادقة أو كاذبة . والواقع أننا نبدأ في الإفادة من هذه القائمة وغيرها من قوائم الصدق المماثلة حين نتخذ إجراء أو عدة إجراءات إزاء هذه القضية الأصلية (ن) ، مثل :

إجراء النفي : فبإتخاذ إجراء النفي مثلا إزاء القضية « ن » ، نحصل على القضية « ~ ن » المتناقضة مع القضية الأصلية . وتسمى القضية الجديدة (~ ن) عادة بدالة —

صدق(١) Truth - function القضية « ں » ، بمعنى أن صدقها أو كذبها ، إنما يتوقف على صدق أو كذب القضية الأصلية ں . وبعبارة أخرى فإننا نستطيع الاستدلال على صدقها أو كذبها ، بناء على معرفتنا بصدق القضية ں . وعلى ذلك فنحن إذا ماوسعنا قائمة الصدق السابقة لكى تشمل القضية الأصلية ونقيضها ، لحصلنا على القائمة التالية :—

ں	~ں
ص	ك
ك	ص
(١)	(٢)

(القائمة رقم ٢)

وتوضح هذه القائمة أن نفى قضية ما هو دالة صدق القضية الأصلية ، ولذا فقد سمينا « ~ ں » بدالة الصدق ، كما نسمى « ں » بأساس — صدق Truth - ground (٢) هذه الدالة . وتسمى « ص ، ك » بقيم الصدق Truth - Values ، أو إمكانات — الصدق Truth - possibilities (٣) ، كما يسمى هذا الجدول كله باسم « قائمة صدق » أو « لوحة صدق » الدالة « ~ں » .

---

(١) Wahrheitsfunktion . إرجع إلى : « رسالة منطقية فلسفية » ، للدفيج فتجنشتين Wittgenstein, L. ، الترجمة العربية لمؤلف هذا الكتاب ، العبارة رقم (٥) .

(٢) Wahrheitsgrund .

(٣) Wahrheitsmoglichkeiten . أنظر : « رسالة منطقية فلسفية » ، للدفيج فتجنشتين (الترجمة العربية) ، العبارة رقم (٤ر٤) .

لنفرض الآن أننا أردنا توسيع القائمة السابقة بإضافة نفى دالة الصدق السابقة ، فسوف نضيف إلى القائمـــة السابقة ، الدالة الجديدة « ـــ ـــ ق » ، ومن ثم نحصل على :

ق	ـــ ق	ـــ ـــ ق
ص	ك	ص
ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)

(القائمة رقم ٣)

فى هذه القائمة ، يمكننا مقارنة قيم الصـــدق الواردة فى العمود (١) الخاص بالقضية (ق) بقيم الصدق الواردة فى العمود رقم (٣) الخاص بالدالة (ـــ ـــ ق) ، فنلاحظ أن أول قيمة ترد فى العمود رقم (١) ، وهى « ص » ، هى نفسها أول قيمة ترد فى العمود رقم (٣) ، كما نلاحظ أن ثانى قيمة ترد فى العمود الأول ، وهى « ك » ، هى نفسها ثانى قيمة ترد فى العمود الثالث . وهـذا يعنى أنه إذا كانت « ق » صادقة ، كانت (ـــ ـــ ق) صادقة ، وأنه إذا كانت « ق » كاذبة ، كانت (ـــ ـــ ق) كاذبة . فإذا عرفنا أن أى قضيتين تشتركان فى جميع قيم الصدق ، يكون بينهما تكافؤ ، فإننا نستدل فى هذه الحالة تكافؤ القضيتين « ق » ، « ـــ ـــ ق » ، ومن ثم نقول أن :—

$$ق \equiv ــ ــ ق$$

ومن ثم نحصل على قانون النفى المزدوج ، السابق ذكره من قبل .

كيفية تكوين قائمة الصدق :

الواقع أن تكوين قائمة الصدق التى يكون أساس الصدق فيها قضية واحدة ،

كما فى الأمثلة السابقة ، أمر سهل ميسور . إلا أن تكوين قائمة الصدق القائمة على أكثر من أساس (أو قضية) واحد ، أكثر صعوبة وتعقيداً ، ويتطلب منا إستخدام قواعد معينة . ولنأخذ مثلا لذلك كيفية تكوين قائمة صدق الدالة العطفية التالية :

(ق . ل) .

لكى نكتب القائمة الخاصة بهذه الدالة . فإننا نتبع الخطوات التالية :(١)

١ — الخطوة الأولى ، أن نكتب التعبير الخاص بالدالة ، أى : (ق . ل) ، ثم نكتب على يمينه متغيرات القضايا ، بالترتيب الذى تظهر عليه فى الدالة ، ثم نضع خطاً تحت الجميع فنحصل على :

ق	ل	ق . ل

٢ — الخطوة الثانية ، أن نبدأ فى كتابة جميع قيم الصدق الممكنة بالنسبة لكل واحد من متغيرات القضايا ، على شكل أعمدة ، كل عمود تحت متغير القضية الخاص به . ولنستخدم الخطوط الرأسية لكى نحصل على الأعمدة المطلوبة ، وذلك كما يلى :—

ق	ل	ق . ل
ص	ص	
ص	ك	
ك	ص	
ك	ك	

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 244

٣ ـ الخطوة الأخيرة ، أن نحسب Calculate قيم صدق الدالة (ق . ل) . وبما أن قيمة صدق الدالة ، هى دالة قيم صدق متغيرات القضية الأصلية التى تتكون منها الدالة ، أو بعبارة أخرى أن قيم صدق الدالة تتوقف على القيم الخاصة بأسس صدق الدالة (أى : ق ، ل) ، فإننا نحصل على :ـــ

	ق . ل	ل	ق
١	ص	ص	ص
٢	ك	ك	ص
٣	ك	ص	ك
٤	ك	ك	ك

(القائمة رقم ٤)

هذا ويلاحظ أننا قد نكتب أحياناً بدلا من « ص » (أى قضية صادقة) ، نكتب العدد « ١ » ، وبدلا من « ك » (أى : قضية كاذبة) ، نكتب «صفر». وبذلك يمكننا كتابة قائمة الصدق على النحو الآتى :ـــ

	ق . ل	ل	ق
١	١	١	١
٢	صفر	صفر	١
٣	صفر	١	صفر
٤	صفر	صفر	صفر

(القائمة رقم ٥)

كما يلاحظ أن إدخال متغيرات القضايا المنفية على قائمة الصدق ، أو بعبارة أخرى، إتخاذ إجراء النفي إزاء دالة الصدق أو جزء منها ، يتطلب منا إدخال تعديلات إضافية على طريقة تكوين القائمة . ولنأخذ مثلا لذلك ، كيفية تكوين قائمة صدق الدالة العطفية التالية :

(~ ق . ~ ل)

ق	ل	~ ق	~ ل	(~ ق . ~ ل)	
ص	ص	ك	ك	ك	١
ص	ك	ك	ص	ك	٢
ك	ص	ص	ك	ك	٣
ك	ك	ص	ص	ص	٤

(القائمة رقم ٦)

وهكذا فنحن قد أضفنا عمودين جديدين أحدهما خاص بالدالة (~ ق) ، والآخر خاص بالدالة (~ ل) لكي نكتب قيم صدق كل واحد من المتغيرين في الدالة .

الآن أصبحت لدينا قاعدتان أساسيتان تتعلقان بكيفية تكوين قوائم الصدق هما:

أولا : أن عدد الصفوف rows(١) في قائمة الصدق يتناسب مع عدد المتغيرات التي تظهر في دالات الصدق . فنحن مثلا في حالة متغير قضية واحد فقط ، لن نحتاج إلا إلى صفين فقط ، أحدهما خاص بالصدق « ص » والآخر بالكذب « ك » كما هو الحال في القائمة رقم ١ والقائمة رقم ٢ .

(١) والمقصود بالصفوف هنا ، الصفوف الأفقية ، أما الصفوف الرأسية فقد أسميناها من قبل باسم الأعمدة Columns . ولعل هذا هو السبب في أن بعض المناطقة يسمون قائمة الصدق أحياناً باسم « مصفوفة الصدق » .

فإذا كان لدينا متغيران لقضيتين ، كما هو الحال فى الدالة العطفية السابق ذكرها : (ق . ل) ، فسوف نحتاج إلى أربعة صفوف ، كما يتضح ذلك من القائمتين رقم ٤ ، ٥ .

ومما هو جدير بالملاحظة أن إتخاذ إجراء النفى بالنسبة لمتغير القضية فى الدالة ، وإن كان يزيد من عدد الأعمدة الرأسية كما فى القائمة رقم ٣ ، أو القائمة رقم ٦ ، إلا أنه لا يزيد من عدد القضايا الأصلية (أو أسس الصدق فى الدالة) ، ومن ثم فلا تترتب عليه أية زيادة فى عدد الصفوف . فعدد الصفوف فى القائمتين رقم ٢ ، ٣ واحد (وهو ٢) ، وعدد الصفوف فى القائمتين ٤ ، ٦ واحد (وهو أربعة صفوف) . لكن لنفرض أن لدينا أكثر من متغيرين للقضية فى الدالة المراد تكوين قائمة صدقها ، كم تكون عدد الصفوف المطلوبة فى القائمة ؟

لو كانت لدينا ثلاثة متغيرات فى الدالة ، فإننا سوف نحتاج إلى ثمانية صفوف ، كما هو الحال فى قائمة الصدق (غير الكاملة)[1] التالية ، الخاصة بالتعبير :

(ق ⊃ ل) . (ق . م) : ⊃ : (ل . م)

---

(١) لقد تعمدنا عدم ذكر القائمة كاملة لأن ما نهتم به فى هذا المثال ، مجرد إبراز عدد الصفوف الأفقية ، لا عدد الأعمدة الرأسية اللازمة لكتابة القائمة ، وهو الأمر الذى سنذكره فيما بعد .

	ن	ل	م	...... (ن ⊃ ل) . (ن . م) : ⊃ : (ل . م)
١	ص	ص	ص	...... ص
٢	ص	ص	ك	...... ص
٣	ص	ك	ص	...... ص
٤	ص	ك	ك	...... ص
٥	ك	ص	ص	...... ص
٦	ك	ص	ك	...... ص
٧	ك	ك	ص	...... ص
٨	ك	ك	ك	...... ص

(القائمة رقم ٧)

والصفوف الثمانية فى حقيقتها تمثل إمكانات صدق وكذب كل قضية من القضايا الثلاث فى حالة صدق وكذب القضيتين الأخريين . ولما كانت إحتمالات صدق أو كذب القضية الواحدة فقط لا يزيد عن إحتمالين ، لأن القضية الواحدة إما صادقة أو كاذبة ، ولما كان عدد القضايا التى نتكلم عنها فى هذه الحالة هو ٣ ، هى (ق ، ل ، م) فإن مجموعات الصدق أو إمكاناته الخاصة بالقضايا الثلاث تكون : ٢^٣ = ٨ .

أما فى حالة وجود متغيرات عددها أكثر من ذلك فى الدالة ، فإن عدد الصفوف سوف يعتمد فى حسابه على نفس الطريقة التى ذكرناها آنفاً فى حالة الصفوف الثمانية ، والتى يمكن أن نلخصها فى الصيغة التالية ٢^ن . بحيث ترمز « ٢ » لعدد قيم الصدق الخاصة بأية قضية ، وتشير « ن » إلى عدد المتغيرات أو أسس الصدق فى الدالة . وهكذا فإننا سوف نحتاج فى حالة وجود أربعة متغيرات مثلا فى الدالة ، مثل (ق،ل،م،هـ) إلى : ٢^٤ = ١٦ صفا يجب أن تملأ بقيم الصدق المناسبة ، أو بعبارة أكثر دقة ، بمجموعات الصدق المناسبة .

ثانياً : لكن كيف نملأ هذه الصفوف بقيم الصدق المناسبة على نحو صحيح وبدون أن نخطئ ؟ أو بعبارة أخرى : كيف نكون مجموعات الصدق الصحيحة التى تتكون منها هذه الصفوف ؟ إن ذلك يتحدد أساساً على عدد الأعمدة الموجودة تحت أسس الصدق فى القائمة . لذا لكى نتجنب الخطأ علينا أن نتبع القاعدة التالية : فى قائمة الصدق المكونة من عمود واحد فقط يكون تغيير قيم الصدق واحدة تلو الأخرى ، فالأولى « ص » والثانية « ك » . ويلاحظ فى القائمة رقم ٢ مثلا أو رقم ٣ — كمثال لذلك — أن كلا منهما قائمة ذات عمود واحد ، لأننا لا نحسب إلا الأعمدة الواردة تحت أسس الصدق ، أو المتغيرات الأصلية فقط (وهى « ق » فى

القائمتين السابقتين) ، لا الأعمدة الواردة تحت دالات الصدق ، وفى حالة قائمـة الصدق ذات العمـودين (مثل القائمة رقم ٤) يـكون تغير القيم إثنتين فاثنتين فى العمـود الأول (أى : ص ، ص — ثم ك ، ك) ، ثم واحدة فواحدة فى العمود الثانى (أى : ص ، ك ، ص ...) ، ويلاحظ فى هذه الحالة أن القائمة رقم ٦ مثلا هى قائمة ذات عمودين فقط .

وفى حالة قائمة الصدق ذات الأعمدة الثلاثة (لثلاثة متغيرات) — كما فى القائمة الناقصة رقم ٧ — يـكون التغير أربعاً فأربع فى العمود الأول (أى : ص ، ص ، ص ، ص ، ثم ك ، ك ، ك ، ك) ، ثم إثنتين فاثنتين فى العمود الثانى ، ثم واحدة فواحدة فى العمود الثالث .

أما فى حالة قائمـة الصدق ذات « ن » من الأعمـدة ، فيـكون التغير كل ($٢^{ن - ١}$) ثم ($٢^{ن - ١}$) فى العمود الأول . حيث تدل « ٢ » على عدد قيم الصدق فى القضية الواحدة وتدل « ن » على عدد متغيرات القضية . وهكذا فى قائمة الصدق ذات المتغيرات الخمسة مثلا ، يـكون تغيير القيم كل ($٢^{٥-١}$) مرة ، ثم ($٢^{٥-١}$) مرة أخرى ، وهـكذا فى العمـــود الأول . (أى كل ١٦ مرة ، لأن : ن = ٥ ، ولأن $٢^{٥-١} = ٢^{٤} = ١٦$) ، ثم يـكون التغير فى العمود الثانى كل ٨ مرات ، وفى العمود الثالث كل ٤ مرات فى العمود الرابع كل مرتين ، حتى العمود الخامس فيـكون كل مرة(١) .

---

(١) ولوكان عدد المتغيرات أو كانت «ن» = ٤ فإن التغير فى العمود الأول يكون كل ٨ مرات وفى الثانى كل ٤ مرات وفى الثالث كل مرتين وفى الرابع كل مرة .

ولنمثل الآن لدالات الصدق الأساسية بواسطة قوائم الصدق الخاصة بها :—

١ — دالة الصدق الخاصة بالنفى (ـ ں) وقد ذكرنا قائمة صدقها من قبل (القائمة رقم ٢) .

٢ — دالة الصدق الخاصة بالفصل . والفصل بين قضيتين يمكن أن يكون فصلا قوياً أو فصلا ضعيفا .

١ — الفصل الضعيف :

وتكتب قائمة الصدق الخاصة بالدالة الفصلية (ں ٧ ل) على النحو الآتى :—

ں	ل	ں ٧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

(القائمة رقم ٨)

(ب) الفصل القوى :

وتكتب قائمة الفصل القوى بين القضيتين ں ، ل ، أى قائمة صدق الدالة الفصلية .

(ں (٧) ل)

ق	ل	ق (٧) ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

(القائمة رقم ٩)

ولكى تسهل علينا المقارنة بين نوعى الفصل القوى والضعيف ، يمكن كتابة الدالتين : (ق ٧ ل) ، (ق (٧) ل) فى قائمة واحدة ، على النحو الآتى : —

ق	ل	ق ٧ ل	ق (٧) ل
ص	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ك
		الفصل الضعيف	الفصل القوى

(القائمة رقم ١٠)

فى هذه القائمة نلاحظ أن قضية الفصل الضعيف ، تكون صادقة دائماً ، ما لم تكن القضيتان المفصولتان كاذبتين معاً . أما قضية الفصل القوى ، فتماثل قضية الفصل الضعيف فى كل مجموعات الصدق بإستثناء مجموعة قيم الصدق الأولى —

الواردة فى الصف الأول — التى تكون فيها القضيتان المفصولتان صادقتين معاً . إذ أن هذه المجموعة يستبعدها الفصل القوى طالما أنه ينص على ضرورة صدق واحدة فقط من القضيتين المفصولتين . هكذا نتبين من القائمة السابقة الفرق بين الدالة (ق v ل) التى تقول : « ق » أو « ل » أو هما معاً ، وبين الدالة (ق (v) ل) التى تقول : إما « ق » أو « ل » ، ولكن ليسا معاً .

٣ — دالة الصدق الخاصة باللزوم :

وتتكون قائمة الصدق الخاصة بها على الصورة العامة التالية :—

ق	ل	ق ⊃ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

(القائمة رقم ١١)

٤ — دالة الصدق الخاصة بالتكافؤ :

ويمكن بسهولة تكوين قائمة التكافؤ ، لو تذكرنا إنه لزوم متبادل ، وعلى ذلك فتكافؤ قضيتين ، يكون هو الحالة التى تستلزم فيها كل قضية من القضيتين القضية الأخرى .

ولقد عبرنا عن ذلك من قبل بالصيغة التالية :

(ق ≡ ل) ≡ (ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)

ومن ثم فإن علينا لكى نكتب قائمة التكافؤ ، أن نذكر الأعمدة الخاصة بالقضيتين اللزومتين المكافئتين ، وذلك كما يلى :—

ق	ل	ق ⊃ ل	ل ⊃ ق	(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)	ق ≡ ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص
		(١)	(٢)	(٣)	(٤)

(القائمة رقم ١٢)

وإن كانت بعض الكتب المنطقية ، تغفل ذكر الأعمدة ١ ، ٢ ، ٣ من القائمة السابقة وتكتب دالة الصدق الخاصة بالتكافؤ السابق كما يلى[1] :—

ق	ل	ق ≡ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

(القائمة رقم ١٣)

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 248.

هذا ويمكن تلخيص قوائم الصدق الخاصة بالدالات الأساسية سالفة الذكر في قائمة صدق واحدة على النحو الآتي(١)

ق	ل	ـ ق	ق . ل	ق v ل	ق (v) ل	ق ⊃ ل	ق ≡ ل
ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
		النفي	العطف	الفصل الضعيف	الفصل القوي	اللزوم	التكافؤ

(القائمة رقم ١٤)

كما يمكننا فيما يلي تلخيص مجموعة القواعد التي إتبعناها حتى الآن في تكوين مجموعات الصدق في القوائم السابقة ، خاصة حين نملأ الأعمدة الموجودة تحت الدالات المختلفة :ـــ

١ — إن دالة النفي ، تكون لها دائماً قيمة صدق مقابلة لقيمة صدق القضية الموجبة .

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.27.

٢ — إن الدالة العطفية ، لا تكون كاذبة قط إلا فى حالة كذب واحدة أو أكثر من القضايا المعطوفة .

٣ — إن دالة الفصل الضعيف لا تكون صادقة إلا فى حالة صدق واحدة أو أكثر من القضايا المفصولة .

٤ — إن دالة الفصل القوى لا تكون صادقة إلا إذا كانت القضايا المفصولة ذات قيم صدق مختلفة ومتقابلة .

٥ — إن دالة اللزوم لا تكون كاذبة إلا إذا كان مقدمها صادقاً وتاليها كاذباً .

٦ — إن دالة التكافؤ لا تكون صادقة إلا إذا كانت للمتكافئات قيم صدق متناظرة ، أى إذا كانت لها نفس قيم الصدق .

هذا ويلاحظ أننا نستطيع التعبير عن مجموعات الصدق فى القائمة بإستخدام الأقواس ، على النحو الذى قام به فتجنشتين فى كتابه « رسالة منطقية فلسفية » ، وذلك كما يلى :—

١ — أن نضع إحتمالات أو إمكانات صدق القضية (ق) أو كذبها بالشكل الآتى :—

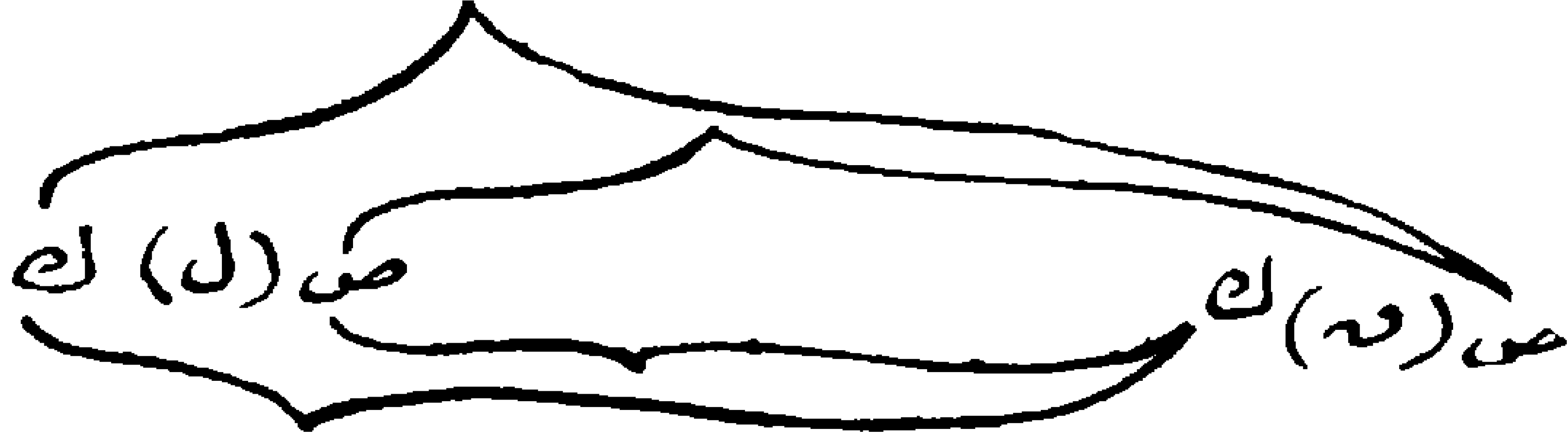
ص (ق) ك

وتقرأ : إن القضية (ق) إما أن تكون صادقة أو كاذبة .

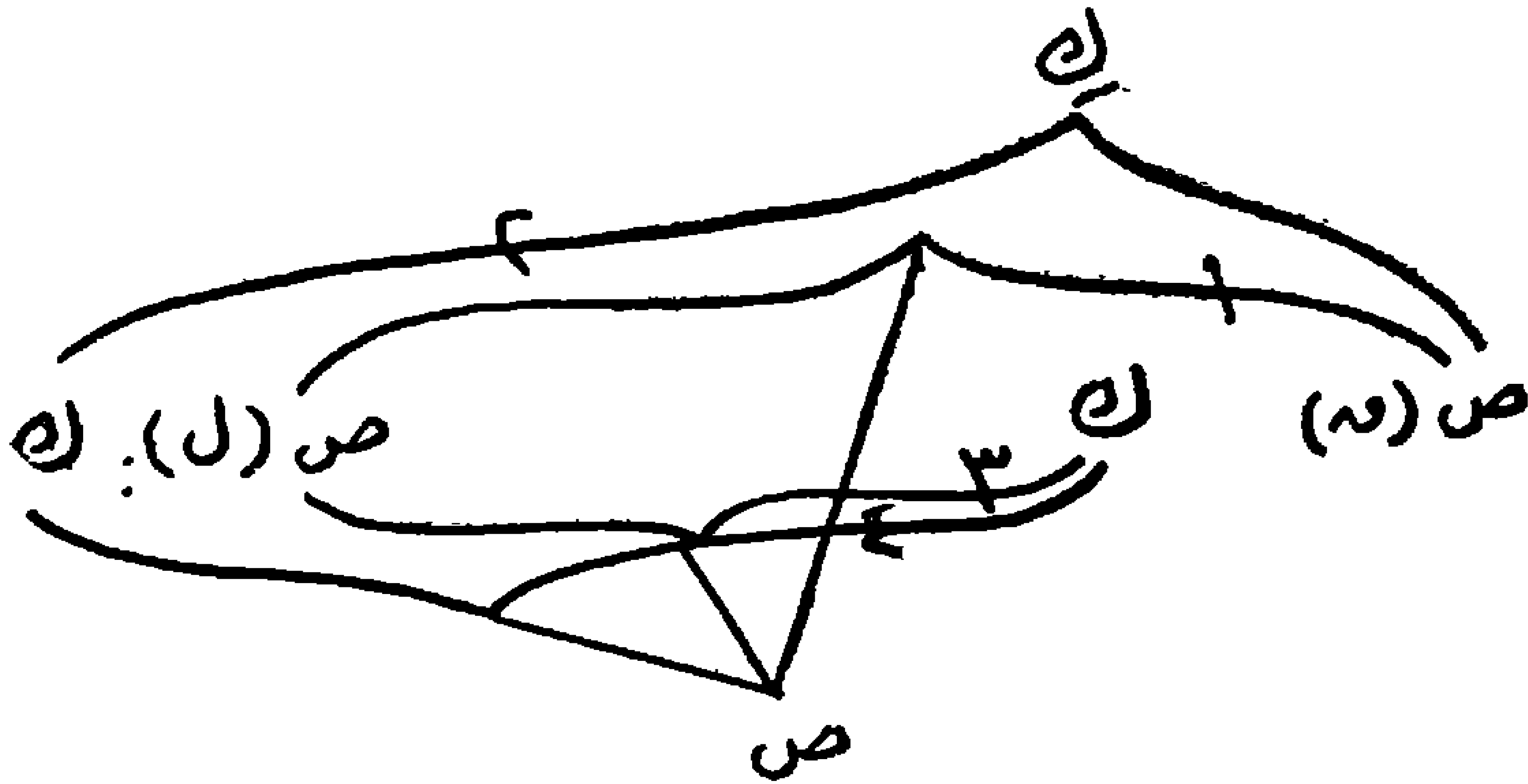
٢ — فإذا كانت لدينا قضيتان مثل ق ، ل ، إستطعنا أن نعبر عن مجموعات صدقهما بالأقواس كما يلى :—(١)

---

(١) لدفيج فتجنشتين : رسالة منطقية فلسفية . (الترجمة العربية) العبارة رقم ٦،١٢٠٣ ، صفحة ١٤٤ .



٣ — فإذا أردنا أن نعبر عن قائمة الصدق الخاصة بالدالة اللزومية (ق ⊃ ل) بإستخدام الأقواس ، فإننا نعبر عن إلتقاء صدق أو كذب كل القضية (أو الدالة) مع مجموعات الصدق بالنسبة إلى متغيرات الصدق بواسطة الخطوط على النحو الآتى :ـ (١) .



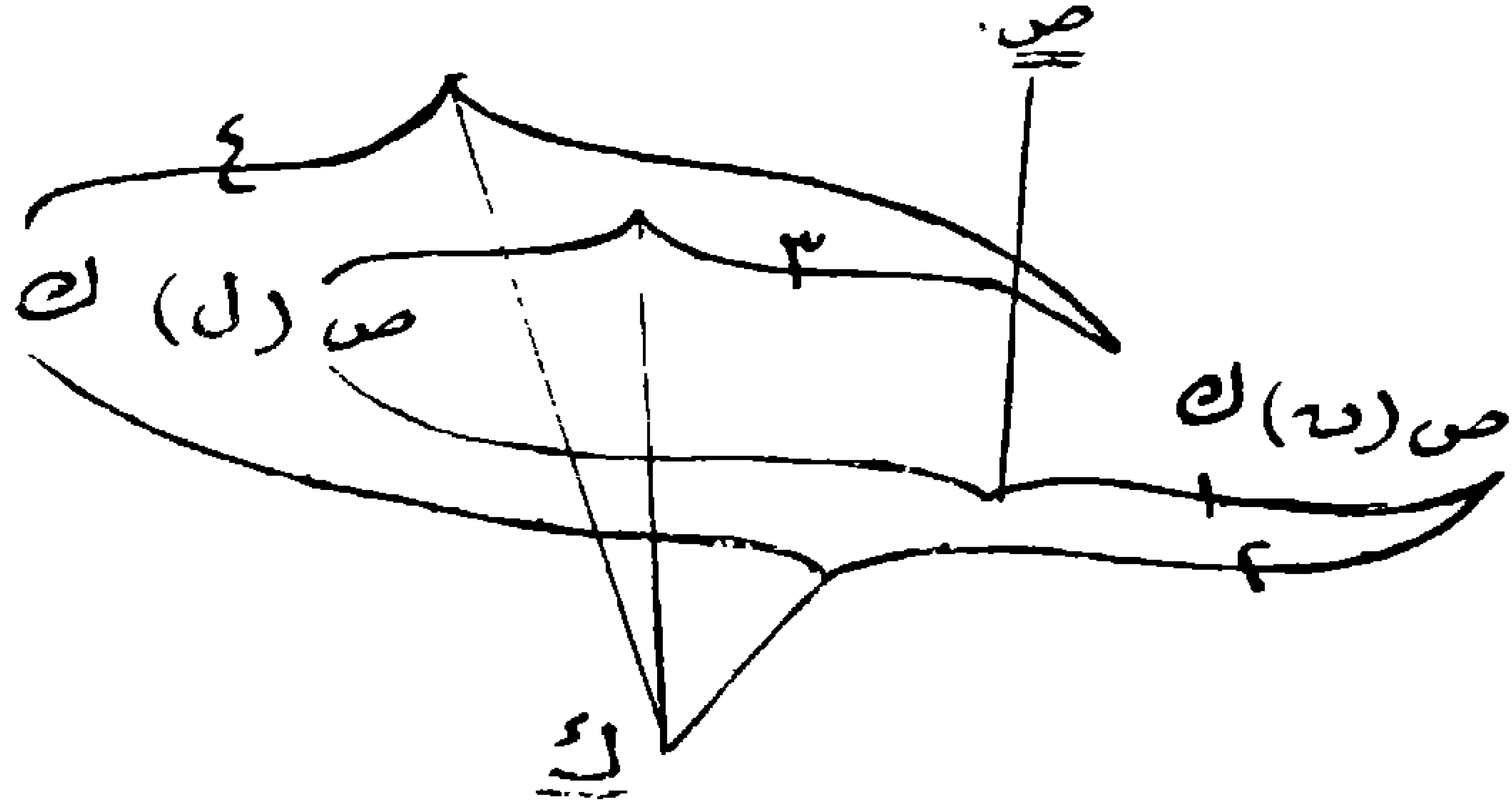
ولـكى يزداد فهمنا لهذه الطريقة ، نقارن هذه القائمة ، بالقائمة الـكاملة لهذه الدالة (وهى رقم ١١) ، مع ملاحظة أن كل صف من صفوف القائمة الـكاملة ، يناظر القوس المرقم بنفس الرقم الخاص بـكل صف فى القائمة رقم ١١ .

٤ — كما أننا لو أردنا أن نعبر عن الدالة (ق . ل) بإستخدام طريقة فتجنشتين

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

فى كتابة القائمة الخاصة بمجموعات الصدق ، لكتبناها كما يلى :— (١)



وبمقارنة أقواس هذه القائمة بالصفوف المناظرة لها ، والتى تحمل نفس الأرقام فى القائمـــة الـكاملة لهذه الدالة، وهى القائمة رقم ٥ ، نلاحظ أن القائمتين تزودانا بمضمون واحد ، وإن إختلف أسلوب التعبير .

ولنطور الآن طريقة تـكوين قائمه الصدق بشـكل أوسع يوضح لنا كيفية الإفادة منها فى الاستدلال والبرهان . ولنأخذ المثل التالى ،وهو تـكوين قائمة الصدق الخاصة بما أسميناه بمبدأ تعدى اللزوم التالى :—

(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م) .

فنحن نـكتب :—

١ — أولا على اليمين المتغيرات القضوية التى ترد فى الدالة ، أو أسس الصدق فيها ، على حسب الترتيب الذى ترد عليه فيها (أى : ن ثم ل ثم م) .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٤٥ .

ن	ل	م	ن ⊃ ل	ل ⊃ م	ن ⊃ م	(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م)	(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤ (١ ، ٢)	٥ (٢ ، ٣)	٦ (١ ، ٣)	٧ (٤ ، ٥)	٨ (٧ ، ٦)

(القائمة رقم ١٥)

٢ — ثم نكتب مختلف الدالات المناسبة ، والتى نحتاج إليها فى القائمة ، متدرجين فى ذلك من الأبسط إلى الأكثر تركيباً .

٣ — ثم نكتب أخيراً ، وفى أقصى اليسار ، التعبير القضوى ، أو الدالة المراد التعبير عنها بالقائمة ، وذلك على النحو الآتى الموضح فى القائمة رقم ١٥ .

ويلاحظ فيما يتعلق بالقائمة السابقة ما يأتى :ـ

١ — إننا نحصل على قيم الصدق الخاصة بالدالات اللزومية فى الأعمدة رقم : ٤ ، ٥ ، ٦ بالرجوع إلى القيم الواردة فى الأعمدة رقم : ١ ، ٢ ، ٣ . وهكذا فالعمودان رقم ١ ، ٢ تلزم عنهما قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٤ . كما تلزم قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٥ عن القيم الواردة فى العمودين ٢ ، ٣ . وتلزم أيضاً قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٦ عن القيم الواردة فى العمودين ١ ، ٣ .

٢ — إن قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٧ ، الخاص بعطف قضيتين لزوميتين ، حصلنا عليها من القيم الموجودة فى العمودين رقم ٤ ، ٥ .

٣ — إن قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٨ ، قد تحددت بناء على القيم الواردة فى العمودين رقم ٦ ، ٧ . مع ملاحظة أن القيم الواردة فى العمود رقم ٧ تشكل المقدمات وأن القيم الواردة فى العمود رقم ٦ هى التوالى ، بالنسبة للدالة اللزومية الواردة فى العمود رقم ٨ . وبعبارة أخرى : لكى نحصل على أية قيمة صدق فى العمود رقم ٨ ، فإننا نقرأ راجعين من العمود رقم ٧ إلى العمود رقم ٦ .

٤ — إننا نستطيع كتابة القائمة السابقة بطريقة مبسطة ، لو لاحظنا الآتى :ـ إننا فى القائمة السابقة رقم ١٥ ، وكذا فى غيرها من القوائم التى يرد فيها أكثر من متغير القضية تكتب « ص » أو « ل » أسفل الرمز الدال على الرابطة المنطقية ،

سواء أكانت رابطة لزوم مثل « ⊃ » أو فصل مثل « v » أو غير ذلك . فنلاحظ مثلا فى العمود رقم ٤ فى القائمة السابقة — فى الصف الأول — أننا قد كتبنا «ص» تحت رابطة اللزوم بين «ن» ، « ل » ، وليست تحت « ن » أو « ل » ، وذلك كما يلى : —

ن ⊃ ل
ص

وعلى ذلك فوجود «ص» أسفل الرابطة « ⊃ » لا يعنى أن ن صادقة أو أن ل صادقة ، إنما يعنى أن (ن ⊃ ل) هى عبارة صادقة .

وبعبارة أخرى ، فالقيم الموجودة فى الأعمدة لا تعبر عن صدق أو كذب القضايا الداخلة فى تكوين الدالة ، بل تعنى صدق أو كذب الدالة بناء على صدق أو كذب أسس صدقها .

وبناء على هذه الملاحظة السابقة يمكننا تبسيط القائمة السابقة على النحو الآتى :—

ن	ل	م	(ن ⊃ ل)	.	(ل ⊃ م)	: ⊃ :	(ن ⊃ م)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٧	٥	٨	٦

(القائمة رقم ١٦)

ومن الممكن التعبير بشكل أكثر تبسيطاً ، بأن نكتب الدالة اللزومية نفسها ، ثم نضع القيم المختلفة أسفل عناصره التي يتكون منها بدون أن نكرر كتابة هذه القيم وذلك على النحو الآتي :—

(ن ⊃ ل)	.	(ل ⊃ م)	: ⊃ :	(ن ⊃ م)
ص ص ص	ص	ص ص	ص	ص
ص ص ص	ك	ك ك	ص	ك
ص ك ك	ك	ص ص	ص	ك
ص ك ك	ك	ص ك	ص	ك
ك ص ص	ص	ص ص	ص	ص
ك ص ص	ك	ك ك	ص	ص
ك ص ك	ص	ص ص	ص	ص
ك ص ك	ص	ص ك	ص	ص
١ ٤ ٢	٧	٥ ٣	٨	٦

(القائمة رقم ١٧)

استخدام قوائم الصدق في الكشف عن صحة الاستدلال :

بعد أن أوضحنا معنى قائمة الصدق ، وكيفية تكوينها ، سنحاول توضيح كيفية الإفادة منها في عملية الإستدلال . والواقع أننا يمكن أن نفيد من قوائم الصدق :—

أولا :

في الكشف عن صحة عبارة إستدلالية معينة ، كما هو الحال في المثال السابق فلو

أردنا أن نكشف عن صحة عبارة اللزوم السابقة :

(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م) .

فإننا نكون قائمة الصدق الخاصة بها ، ثم نقرأ العمود الخاص بالدالة ، وهو العمود رقم ٨ فى القوائم رقم ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، نقرأ قيم الصدق الواردة فيه ، فإن كانت جميعها « ص » أى صادقة ، كان معنى ذلك أن هذه الدالة اللزومية صادقة فى جميع الحالات الممكنة التى تمثلها مجموعات الصدق المختلفة ، وعلى ذلك فهى صيغة صادقة ، ومن ثم تعبر عن إستدلال صحيح .

وبعبارة أخرى ، بما أن الصفة المميزة لأى عملية إستدلالية صحيحة هى كونها صادقة بالضرورة فى جميع الحالات الممكنة ، وبما أن قائمة الصدق تذكر جميع الامكانات ، أى كل المجموعات الممكنة لقيم الصدق ، فإننا نقول بأن الإستدلال الصحيح ، هو الذى يكون صادقاً فى قائمة الصدق فى كل حالة من الحالات الممكنة . وبالتالى فإننا لن نجد فى العمود الخاص بالعبارة الاستدلالية إلا الرمز « ص » الدال على الصدق . إذن يمكننا القول بأن قائمة الصدق من الممكن إستخدامها لاختبار صحة testing for validity العبارات الاستدلالية المراد الكشف عن صحتها . ولنأخذ الأمثلة التالية لتوضيح ذلك :—

١ — لو كانت لدينا قاعدة الإثبات modus Ponens مثلا ، وفرضنا أننا لا نعرف أنها عبارة لزومية صحيحة ، وأردنا أن نكشف عما إذا كانت تعبر عن إستدلال صحيح أم لا ، فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها ، وذلك كما يلى :

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

ں	ل	ں ⊃ ل	(ں ⊃ ل) . ں	(ں ⊃ ل) . ں : ⊃ : ل
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥
		(١ ، ٢)	(٣ ، ١)	(٤ ، ٢)

(القائمة رقم ١٨)

ويمكننا أن نلاحظ فى هذه القاعدة ما يأتى :

(ا) إن قيم الصدق الواردة فى العمود ٣ ، قد حصلنا عليها من القيم المقابلة لها فى العمودين رقم ١ ، ٢ .

(ب) إن قيم الصدق الواردة فى العمود ٤ ، حصلنا عليها من القيم المقابلة لها فى العمودين رقم ٣ ، ١ .

(حـ) إن قيم الصدق الواردة فى العمود ٥ ، حصلنا عليها من القيم الواردة فى العمودين رقم ٤ ، ٢ .

(ى) إن جميع قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٥ ، وهو الخاص بالعبارة الاستدلالية أو المراد الكشف عن صحتها ، لا نجد فيها إلا « ص » فقط . أى

أن العبارة صادقة فى جميع الحالات الممكنة . إذن فهى تعبر عن استدلال صحيح .

(هـ) إننا قد كتبنا دالة اللزوم (ق ⊃ ل) أولا قبل كتابة الدالة العطفية « (ق ⊃ ل) . ق » ، وهذا هو الترتيب الصحيح فى كتابة هذه القائمة . إذ أننا لو أهملنا الأقواس ، وكتبنا (ل . ق) أولا ، ثم أتبعنا ذلك بكتابة دالة اللزوم لوجدنا أنها قد أصبحت دالة مختلفة للزوم بين « ق » وبين « ل . ق » ، الأمر الذى ينتهى بنا إلى تكوين خاطئ لقائمة الصدق . ولذا فإن قائمة الصدق ما لم تبنى خطوة خطوة ، فتبدأ من العناصر الداخلة فى الأقواس ، إلى تلك الخارجة عنها ، فلن تكون النتيجة مضمونة الصحة .

٢ — لو كانت لدينا عبارة الاستدلال الفصلى التالية :

(ق v ل) . ~ ق : ⊃ : ل

وأردنا أن نختبر صحة الاستدلال فيها ، فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها ، كما يلى :

ق	ل	ق v ل	~ ق	(ق v ل) . (~ ق)	(ق v ل) . ~ ق : ⊃ : ل
ص	ص	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ك	ص

(القائمة رقم ١٩)

لاحظ ترتيب الأعمدة فى هذه القائمة وقد وردت على نفس الترتيب الذى وردت به فى العبارة الأصلية . ما الذى نفهمه من هـذه القائمة ؟ هل هذه العبارة تدل على إستدلال صحيح أم لا ؟

لو نظرنا إلى العمود الأخير الخاص بهـذه العبارة ، فإننا لا نجد إلا « ص » فقط . إذن فهى عبارة صادقة فى جميع الحالات الممكنة . إذن فالاستدلال الذى تعبر عنه إستدلال صحيح .

٣ — متى إذن نعرف أن الاستدلال الذى تعبر عنه عبارة ما ، إستدلال غير صحيح ؟ حينما نجد فى العمود الخاص بالعبارة ، « ل » واحدة على الأقل . فى هذه الحالة تـكون العبارة كاذبة بالنسبة لحالة واحدة على الأقل من الحالات الممـكنة . ومن ثم يكون الاستدلال الذى تعبر عنه غير صحيح . ولنأخذ مثلا لذلك العبارة التالية :

(ق ⊃ ل) . ~ ق : ⊃ : ~ ل

وتـكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتى :

ق	ل	ق ⊃ ل	~ ق	(ق ⊃ ل) . ~ ق	~ ل	(ق ⊃ ل) . ~ ق : ⊃ : ~ ل
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	

(القائمة رقم ٢)

يلاحظ أننا لم نستكمل كتابة القائمة ، فلم نذكر بقية قيم الصدق فى الصف الرابع من العمود الأخير ، وذلك لأننا لا نحتاج إلى الاستمرار إلى ما هو أكثر من قيمة الصدق الثالثة فى هذا العمود ، لأن « ك » فى هذه الحالة توضح لنا إمكان وجود قيمة واحدة من قيم صدق الاستدلال فى حالة كذب . وعلى ذلك فهذه العبارة ليست صادقة فى جميع الحالات الممكنة ، بل كاذبة على الأقل فى الحالة التى تكون فيها « ق » كاذبة ، « ل » « صادقة » . ومن ثم فهى لا تعبر عن استدلال صحيح .

ثانياً :

الاستدلال على صدق أو كذب دالة ما ، بناء على معرفة صدق أو كذب دالات أخرى مكافئة لها . وبعبارة أخرى فنحن نستخدم قوائم الصدق فى الكشف عن الصدق والكذب بناء على الكشف عن التكافئات . ولتوضيح ذلك سنأخذ الأمثلة التالية :

(ا) سبق أن ذكرنا فى قائمة للتكافئات من قبل ، أن قضية اللزوم (ق⊃ل) تكافىء القضية العطفية التالية : ـ (ق . ـ ل) ، والقضية الفصلية التالية : (ـ ق v ل) . وبعبارة أخرى أن الدالة اللزومية : (ق ⊃ ل) يمكن تعريفها إما بواسطة النفى والعطف أو باستخدام النفى والفصل . وسنحاول الآن التعبير عن معنى هذا التكافؤ (لا بين قضيتين أو متغيرين قضويين مثل ق ، ل ، بل بين دالتى صدق) باستخدام قوائم الصدق .

١ — ولنبدأ بتعريف اللزوم ، بالنفى والفصل وذلك كما يلى :

(ق ⊃ ل) ≡ (ـ ق v ل)

ق	ل	~ق	ق ⊃ ل	~ ق v ل
ص	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٥
			(٢،١)	(٢،٣)

(القائمة رقم ٢١)

ما الذى تعنيه هذه القائمة ؟ لو قارنا بين قيم الصدق الواردة فى العمودين ٤ ، ٥ للاحظنا أنها متناظرة بمعنى إننا لو إخترنا أى واحدة من قيم الصدق ، فى أى من العمودين ، لوجدنا أن القيمة الموجودة معها فى نفس الصف ، فى العمود الآخر ، مناظرة لها . فلو كانت « ص » ، كانت القيمة المناظرة لها فى العمود الآخر هى «ص» أيضاً ، وكذلك لو كانت « ك » لكانت القيمة المناظرة لها فى العمود الآخر هى « ك » أيضاً . وما معنى هذا ؟

معناه أن الدالتين تشتركان فى جميع حالات الصدق ، وجميع حالات الكذب ، فإذا كانت الواحدة صادقة ، كانت الأخرى صادقة ، وإذا كانت كاذبة كانت الأخرى كذلك . وهذا يعنى أن صدق إحداها يستلزم صدق الأخرى ، وأن كذب إحداها يستلزم كذب الأخرى .

وقد عرفنا من قبل أن اللزوم التبادل بين أى قضيتين يفيد معنى التكافؤ بينهما .

إذن فالدالتان (ق ⊃ ل) ، (~ ق ∨ ل) متكافئتان . إذن فالصيغة :

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ق ∨ ل)

صيغة صحيحة .

٢ — كما سنقوم بالتعبير عن التكافؤ بين اللزوم ، وبين النفي والعطف ، وذلك باستخدام قائمة الصدق التالية ، للتعبير .

(ق ⊃ ل) ≡ ~(ق . ~ ل)

ق	ل	~ ل	(ق ⊃ ل)	~(ق . ~ ل)	(ق . ~ ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ك
١	٢	٣	٤	٥	٦

(القائمة رقم ٢٢)

فبمقارنة العمودين ٤ ، ٥ نلاحظ أن قيم الصدق فيهما متناظرة ، وهذا يعنى وجود تكافؤ بين الدالتين « (ق ⊃ ل) ، ~(ق . ~ ل) » . ويلاحظ فى هذه الحالة أننا قد إتبعنا الخطوات التالية فى تكوين القائمة :—

١ — نكتب أولا من اليمين أسس الصدق ، وهى : ق ، ل .

٢ — ثم نكتب الدالات المستخدمة فى التعبير الرمزى ، وهى على الترتيب :

« ~ ل » ، « ق ⊃ ل » ، « ~(ق . ~ ل) » .

٣ — ثم نضع قيم الصدق الخاصة بالأعمدة (ق) ، (ل) ، (~ل) ، (ق ⊃ ل) .

٤ — لكى نتوصل إلى معرفة قيم صدق « ~(ق . ~ل) » ، نلاحظ أنها تنفى « ق . ~ل » ، ولهذا فإننا نضع الدالة الجديدة (ق . ~ل) ونكتب تحتها قيم صدقها بناء على معرفة قيم صدق (ق) ، (~ل) .

٥ — إذا عرفنا قيم صدق (ق . ~ل) ، عرفنا بالتالى قيم صدق « ~(ق . ~ل) » ، وذلك بأن نضع فى مقابل كل قيمة صدق فى العمود الخاص بـ (ق . ~ل) ، نفى هذه القيمة فى العمود الخاص بـ « ~(ق . ~ل) » .

٦ — نقارن بين قيم الصدق فى العمودين رقم ٤ ، ٥ فنلاحظ أنها متنافرة . وعلى ذلك ننتهى إلى أن التعبيرين « ~(ق . ~ل) » ، « ق ⊃ ل » متكافئات .

∴ فالصيغة التالية صيغة صحيحة :

(ق ⊃ ل) ≡ ~ (ق . ~ل) .

هذا ويمكن التعبير عن صحة هذه الصيغة بإدخالها على القائمة السابقة على النحو الآتى :—

ق	ل	~ل	ق ⊃ ل	~(ق . ~ل)	(ق . ~ل)	(ق ⊃ ل) ≡ ~(ق . ~ل)
ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧ (٣، ٥)

(القائمة رقم ٢٣)

فى هذه القائمة نتبين أن جميع القيم الواردة فى العمود رقم ٧ هى « ص » فقط . إذن فالتعبير الخاص بهـذه القائمة صادق فى جميع الحالات . ومن ثم فهو صحيح .

(ب) وبناء على ما سبق فإننا نستطيع معرفة أنواع التكافؤ بين دالات صدق أخرى بطريقة مماثلة . فدالة الصدق العطفية (ق . ل) ، يمكن تعريفها بواسطة النفى واللزوم ، وعلى ذلك فإن : (ق . ل) تكون مكافئة للدالة « ~(ق ⊃ ~ل) » . أى أن :

١ — (ق . ل) ≡ « ~(ق ⊃ ~ل) »

وتكتب قائمة الصدق الخاصة بذلك على النحو الآتى :—

ق	ل	~ ل	ق . ل	~ (ق ⊃ ~ ل)	ق ⊃ ~ ل
ص	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ك	ص
			١	٢	٣

(القائمة رقم ٢٤)

نلاحظ فى هذه القائمة أن العمودين رقم ١ ، ٢ فيهما قيم صدق متناظرة ، وهذا يوضح أننا عرفنا بطريقة صحيحة ، دالة صدق بواسطة دالة صدق أخرى . (ونحن قد حصلنا على قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٢ ، بواسطة نفى قيم الصدق الواردة فى العمود ٣) .

٢ — لنفرض الآن أننا نريد الاستدلال على تكافؤ الدالتين : (ق . ل) ، (ق ⊃ ل) بعد أن زعمنا أنهما كذلك . لذا نكتب قائمة الصدق الخاصة بهما كما يلى :—

ق	ل	ق . ل	ق ⊃ ل	
ص	ص	ص	ص	١
ص	ك	ك	ك	٢
ك	ص	ك	ص	← ٣
ك	ك	ك	ص	← ٤
		١	٢	

(القائمة رقم ٢٥)

هنا نلاحظ عدم تكافؤ الدالتين ، لأنه على الرغم من تناظر قيم الصدق فى بعض الحالات الواردة فى العمودين ١ ، ٢ . إلا أن الصفين الثالث والرابع يوضحان الإختلاف بين قيم صدق التعبيرين . وهما لكى يكونا متكافئين يجب أن يتضمنا قيم صدق متماثلة فى كل صف من صفوف القائمة .

هكذا نكون قد إستخدمنا قائمة الصدق للبرهنة على عدم تكافؤ دالات الصدق ، كما استخدمناها من قبل للبرهنة على تكافؤ دالات الصدق . وسواء كنا نستخدمها لاثبات التكافؤ أو عدم التكافؤ بين دالات الصدق ، فنحن إنما نستخدمها للاستدلال على صدق دالة ما أو كذبها بناء على معرفة تكافئها مع دالة صدق أخرى .

(جـ) كما يمكننا البرهنة على تكافؤ دالة الفصل الضعيف (ق v ل) ، ودالة صدق عطفية مثل « ـ (ـ ق . ـ ل) » وهذا ما يتضح من قائمة الصدق التاليـة :—

ق	ل	ـ ق	ـ ل	ـ ق . ـ ل	ـ (ـ ق . ـ ل)	ق v ل
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك
					١	٢

(القائمة رقم ٢٦)

نلاحظ فى هذه القائمة أن القيم الواردة فى العمودين رقم ١ ، ٢ واحدة ، وهذه يدل على تكافؤ الدالتين المذكورتين .

(د) ويمكننا البرهنة على تكافؤ دالة الفصل القوى (ق (٧) ل) ، والدالة العطفية المنفية التالية : « ~(~ق . ~ل) . ~(ق . ل) » . أى أن :—

(ق (٧) ل) ≡ « ~(~ق . ~ل) . ~(ق . ل) » .

وهذا ما يتضح من القائمة التالية :—

ق	ل	~ق	~ل	~ق . ~ل	~(~ق . ~ل)	ق . ل	~(ق . ل)	~(~ق . ~ل) . ~(ق . ل)	ق (٧) ل
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك
		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨

(١ ، ٢) (٤ ، ٦)

(القائمة رقم ٢٧)

ونلاحظ فى هذه القائمة أن قيم الصدق الخاصة بإجراء العطف الكبير فى العمود رقم ٧ ، هى نفسها القيم الواردة فى العمود رقم ٨ . وهذا يعنى تكافؤ دالتى الصدق المعنيتين .

(هـ) كما يمكن البرهنة على تكافؤ دالة صدق التكافؤ المادى ، ودالة صدق تقوم على النفى والعطف . أى أن نبرهن على صحة العبارة التالية :—

(ق ≡ ل) : ≡ : ~(ق . ~ل) . ~(ل . ~ق)

وتقرأ : إن القول بأن ن تكافىء ل ، يكافىء القول : بأنه من الكذب أن تكون « ن » صادقة ، « ل » كاذبة معاً ، وأنه من الكذب أن تكون « ل » صادقة ، « ن » كاذبة معاً . ويمكن البرهنة على ذلك بإستخدام قائمة الصدق التالية :—

ق	ل	~ ن	~ ل	ن . ~ ل	~ (ن . ~ ل)	ل . ~ ق	~ (ل . ~ ن)	~ (ن . ~ ل) . ~ (ل . ~ ن)	ن ≡ ل
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

(القائمة رقم ٢٨)

فبمقارنة العمودين ٩ ، ١٠ نلاحظ أن قيم الصدق فيهما متناظرة على مستوى جميع الصفوف . إذن فالتعبيران الواردان فى العمودين ٩ ، ١٠ تعبيران متكافئان .

هذا ويمكننا بالإضافة إلى كل الأمثلة السابقة ، البرهنة بإستخدام قوائم الصدق على تكافؤ دالة الفصل الضعيف ، مع الدالة القائمة على اللزوم والنفى ، وتكافؤ دالة الفصل القوى مع الدالة القائمة على اللزوم والنفي ، وتكافؤ الدالة العطفية مع الدالة القائمة على الفصل والنفى ، وتكافؤ دالة التكافؤ المادى ، مع الدالة القائمة على الفصل القوى وغير ذلك .

ثالثاً :

الكشف عن أنواع الدالات المختلفة ، مثل تلك التي تحتمل الصدق والكذب ، أي الدالات الممكنة contingent أو تلك التي تكون صادقة دائماً ، أي الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل tautologous ، أو تلك التي تكون كاذبة دائماً ، أي الدالات المعبرة عن تناقض ذاتي Self - contradictory . ولتوضيح ذلك نقول : لو كانت لدينا دالة الصدق (ق . ل) مثلا ، فإننا لا نعرف مسبقاً أو بشكل قبلي أو أولي ، ما إذا كان هذا التعبير صادقاً أو كاذباً . بل سنعرف صدقه أو كذبه بناء على معرفة قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات « ق » ، « ل » الواردة في الدالة . وبعبارة أخرى فإن قيمة صدق التعبير المطلق ستكون متوقفة على قيم القضايا المفردة ، أو ستكون ممكنة بناء على قيم صدق هذه القضايا . وبتطبيق مثل هذا التحليل بالنسبة لدالات الصدق ، وبمناقشة قوائم الصدق الخاصة بها ، يمكننا أن نرى أن مثل هذه الدالات دالات ممكنة ، بمعنى أن نعرف قيم صدقها معرفة بعدية ، وتكون مرهونة بقيم صدق المتغيرات الواردة في هذه الدالات .

أما التعبيرات ، أو الدالات التي نعرف صدقها أو كذبها قبلياً أو أولياً Apriori (١) فهي إما أن تكون تعبيرات دالة على تحصيل الحاصل ، أو دالة على التناقض الذاتي .

(أ) الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل :

وهي الدالات التي تكون صادقة صدقاً أولياً ، أو صادقة صدقاً غير مشروط (إذ ليس لتحصيل الحاصل شروط — صدق ، لأنه صادق صدقاً غير مشروط)(٢) .

---

(١) والأولية هنا لا تحمل أي معنى فلسفي أو ميتافيزيقي ، بل تعني أننا ندرك من الدالة نفسها ما إذا كانت صادقة أو كاذبة بالضرورة .

(٢) لدفيج فتجنشتين : رسالة منطقية فلسفية . (الترجمة العربية) — عبارة رقم ٤٦١ر٤ ، صفحة ١٠٥ .

ولنأخذ التعبير التالى البسيط الذى يعبر عن تحصيل الحاصل :

ں ٧ ـ ں

فإذا ما كونا قائمة الصدق الخاصة به على النحو الآتى :ـــ

ق	ـ ق	ق ٧ ـ ق
ص	ك	ص
ك	ص	ص

(القائمة رقم ٢٩)

فإننا نلاحظ أنه مهما كانت قيمة « ں » هى الصدق أو الـكذب ، فإن قيمة صدق الدالة (ں ٧ ـ ں) تـكون هى الصدق فقط دائماً . وبما أن « ں » متغير يدل على أية قضية ولا يدل على قضية معينة بالذات ، فإننا نستنتج أن عبارة الفصل أو الدالة الفصلية التى تجمع بين أية قضية (مثل ں) ونقيضها (ـ ں) تـكون عبارة صادقة بالضرورة ، أو هى معبرة عن تحصيل الحاصل ، بغض النظر عما تشير إليه « ں » .

وبعبارة أخرى ـــ لو إستخدمنا تحليل قائمة الصدق السابقة ـــ نقول أن العمود

الخاص بمثل هذه الدالات ، لن يحتوى إلا على قيم صادقة (ص) فقط بدون أن ترد فيه (ك) واحدة أو قيمة واحدة تدل على الكذب .

ومن الممكن توضيح ذلك بأمثلة أكثر تركيباً من مثلنا السابق ، سبق ذكرها من قبل (مثل القوائم رقم ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ وكذا القائمة ١٩ وغيرها) .

فجميع الدالات المماثلة للدالات التالية : —

١ — (ق ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ق ⊃ م)
(قوائم ١٥ ، ١٦ ، ١٧)

٢ — (ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل (قائمة رقم ١٨)

٣ — (ق ∨ ل) . ~ ق : ⊃ : ل (قائمة رقم ١٩)

هى دالات صادقة دائماً ، ومن ثم فهى معبرة عن تحصيل الحاصل . وسنأخذ المثال التالى لبيان كيفية تكوين قائمة صدق الإحراج البنائى التالى :

(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ق ∨ م) : ⊃ : ل ∨ ن

لتوضيح معنى تحصيل الحاصل ، وذلك على النحو الآتى : — (١)

---

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic, P.257

[(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن)] . (ق v م) : ⊃ : (ل v ن)

ق	ل	م	ن	ق ⊃ ل	م ⊃ ن	(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن)	ق v م	[(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن)] . (ق v م)	ل v ن	[(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن)] . (ق v م) : ⊃ : (ل v ن)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١

(القائمة رقم ٣٠)

كما يمكن التعبير عن هذه القائمة بشكل مبسط على النحو الآتى :ــ

[(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن)] . (ق v م) : ⊃ : (ل v ن)

ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص	ك
١	٥	٢	٧	٣	٦	٤	٩	٨	١١	١٠

(القائمة رقم ٣١)

نلاحظ فى هذه القائمة ، وكذا القائمة السابقة أن العمود رقم ١١ ، وهو الخاص بدالة الإحراج ، لا يحتوى إلا على قيم صدق كلها صادقة فى جميع الصفوف . ومن ثم فإن الدالة فى هذه الحالة تكون معبرة عن تحصيل الحاصل .

والواقع أننا نستطيع أن نضيف إلى ذلك القول بأن مثل هذه الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل ، إنما تعبر عن صحة الإستدلال ، طالما أن الإستدلال الصحيح هو الذى تلزم نتيجته بالضرورة عن مقدماته فى جميع الأحوال(١) .

(ب) الدالات المعبرة عن التناقض الذاتى :

إذا عرفنا أن الدالة المعبرة عن تحصيل الحاصل تنفى الدالة المعبرة عن التناقض ، والعكس صحيح ، لعرفنا أن دالة التناقض تكون كاذبة دائماً ، وفى جميع الحالات طالما كانت دالة تحصيل الحاصل صادقة دائماً وفى جميع الحالات . ولذا لو أننا نفينا دالة تعبر عن تحصيل الحاصل مثل : (ق٧ ـ ق) ، لحصلنا على دالة التناقض التالية :

١ — ـ (ق٧ ـ ق)

التى تقرأ : إنه من الكذب أن نقول أن القضية ق ، إما أن تكون صادقة أو تكون كاذبة . والتى يمكن أن نكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتى :

---

(١) والواقع أن الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل ، كثيرة ومتعددة طالما أنها تعبر عن الصيغ الصحيحة دائماً وفى جميع الحالات . ومن شاء الاستزادة فى هذا الصدد يمكنه الرجوع إلى كتاب كارنب :

ق	ـ ق	ق v ـ ق	ـ (ق v ـ ق)
ص	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ك

(القائمة رقم ٣٢)

فى هـــذه القائمة نلاحظ أن العمود رقم (١) ترد فيه القيم الدالة على تحصيل الحاصل ، كما نلاحظ أن العمود رقم (٢) ترد فيه القيم النافية لقيم تحصيل الحاصل ، أو المقابلة لها ، وتمثل الـكذب فى جميع الحالات ، أى التناقض الذاتى .

٢ — ولنأخذ المثال التالى الذى يوضح العلاقة بين التناقض وبين تحصيل الحاصل ، وسوف نرى فى قائمة الصدق التالية أننا لو نفينا الدالة الخاصة بقاعدة الرفع ، فسنحصل على دالة كاذبة فى جميع قيمها ، وبالتالى تـكون متناقضة ، وهى :

ـ [(ق ⊃ ل) . ـ ل : ⊃ : ـ ق]

Carnap, R : Introduction to Symbolic and its Applications, pp. 26 - 27

الذى أورد قائمة مطولة للتعبيرات الخاصة بتحصيل الحاصل ، وكذا رايشنباخ فى كتابه سالف الذكر « عناصر المنطق الرمزى » (صفحة ٣٨ — ٣٩) الذى أورد عدداً كبيراً من الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل بلغت ٤٦ دالة صدق .

ق	ل	~ ق	~ ل	ق ⊃ ل	(ق ⊃ ل) . ~ ل	(ق ⊃ ل) . ~ ل : ⊃ : ~ ق	~ [(ق ⊃ ل) ~ ل : ⊃ : ~ ق]
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
		١	٢	٣	٤	٥	٦

(القائمة رقم ٣٣)

فى هذه القائمة نجد أن قيم الصدق الواردة فى العمود رقم ٥ تمثل تحصيل الحاصل ، والقيم الواردة فى العمود رقم ٦ تمثل قيم تحصيل الحاصل بعد نقضها ، فأصبحت تمثل معنى التناقض .

الآن أصبح فى إمكاننا ، لو وجدنا دالة صدق ما ، أن نكشف عما إذا كانت صادقة دائماً (أى معبرة عن تحصيل الحاصل) أو كاذبة دائماً (أى معبرة عن تناقض) ، أو عما يمكن أن يصدق أو يكذب (أى ممكنة الصدق) ، وذلك بإستخدام قوائم الصدق . وأن نكشف بالتالى — لو كانت هذه الدالات معبرة عن إستدلال — عما إذا كان الإستدلال صحيحا (فى حالة الصدق الدائم فى جميع الحالات) ، أو كان غير صحيح (لتناقض الدالة أو لإمكان كذبها ولو فى حالة واحدة) . ولنأخذ لتأكيد هذا المعنى وزيادة إيضاحه الأمثلة التالية :—

١ — لو كانت لدينا الدالة الآتية :—

(ن ⊃ ل) ≡ (~ل ⊃ ~ن)(١)

فإننا نتبين من قائمة الصدق الخاصة بها بطريقة مباشرة أنها تعبر عن تحصيل الحاصل ، ومن ثم عن إستدلال صحيح طالما أن العمود الخاص بها فى القائمة لا يحتوى من بين قيم صدقه على قيمة واحدة كاذبة ، وذلك كما يلى :ـــ

ق	ل	~ق	~ل	ق ⊃ ل	~ل ⊃ ~ن	(ق ⊃ ل) ≡ (~ل ⊃ ~ق)
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص

(القائمة رقم ٣٤)

٢ ـــ لو كانت لدينا الدالة :

~ (ن · ل) ≡ (~ن ∨ ~ل)(٢)

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن إستدلال صحيح أم لا ، أن نكتب قائمة الصدق الخاصة بها كما يلى :ــ

---

(١) وتمثل هذه الصيغة ما أسميناه من قبل بقانون عكس النقيض أو التناقل transposition.

(٢) وتمثل هذه الصيغة القانون الأول من قانونى دى مورجن السابق ذكرها .

ق	ل	ـ ق	ـ ل	ق . ل	ـ (ق . ل)	ـ ق ٧ ـ ل	ـ (ق . ل) ≡ (ـ ق ٧ ـ ل)
ص	ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص

(القائمة رقم ٣٥)

فى القائمة السابقة نلاحظ أن جميع القيم الواردة فى العمود الخاص بالدالة هى « ص » فقط ، ومن ثم فهى تعبر عن تحصيل حاصل ، ومن ثم عن إستدلال صحيح .

٣ — لو كانت لدينا الدالة :ـ

ـ (ق ٧ ل) ≡ (ـ ق . ـ ل)(١)

وأردنا أن نتبين مدى صحة الاستدلال فيها ، لكتبنا قائمة صدقها على النحو الآتى :ـ

---

(١) وتمثل هذه الصيغة القانون الثانى من قانونى دى مورجن سالفى الذكر .

ق	ل	ـ ق	ـ ل	ـ ق . ـ ل	ق V ل	ـ (ق V ل)	ـ (ق V ل) ≡ (ـ ق . ـ ل)
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص

(القائمة رقم ٣٦)

ولتبينا فى هذه القائمة أن جميع القيم الواردة فى العمود الخاص بالدالة لا تحتوى إلا على « ص » فقط ، ومن ثم فهى تعبر عن تحصيل الحاصل ، وبالتالى عن إستدلال صحيح .

٤ — لو كانت لدينا الدالة :

(ن ⊃ ل) . (ن ⊃ م) : ⊃ : (ل ⊃ م)

وأردنا أن نتبين مدى صحة الاستدلال الذى تعبر عنه ، فإننا نكتب قائمة صدقها كما يلى : —

ق	ل	م	ق ⊃ ل	ق ⊃ م	(ق ⊃ ل) . (ق ⊃ م)	ل ⊃ م	(ق ⊃ ل).(ق ⊃ م) : ⊃ : (ل ⊃ م)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨

(القائمة رقم ٣٧)

كما يمكننا أن نكتب القائمة بشكل مبسط على النحو الآتى :—

ق	ل	م	(ق ⊃ ل)	.	(ق ⊃ م)	: ⊃ :	(ل ⊃ م)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك
ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ض	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٦	٥	٨	٧

(القائمة رقم ٣٨)

بملاحظة القائمتين السابقتين ، نجد أن العمود رقم ٨ وهو خاص بالدالة المعنية يحتوى على قيمة واحدة كاذبة فى الصف السادس ، وهذا وحده كفيل بأن يجعل الدالة ممكنة وليست معبرة عن تحصيل الحاصل . ومن ثم فهذا وحده مبرر يكفى للقول بأن الاستدلال غير صحيح.

الطريقة المعدلة لقائمة الصدق الخاصة بالدالة اللزومية :

لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا إنخفضت درجة الحرارة إلى ما دون الصفر ، تجمدت المياه . وقد إنخفضت درجة الحرارة إلى ما دون الصفر . إذن فقد

تجمدت المياه) ، وأردنا أن نتثبت من صحته ، فإننا نشير إليه بالصيغة الرمزية التالية :—

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

ثم نعبر عن هذه الدالة بقائمة الصدق التالية :—

ق	ل	ق ⊃ ل	(ق ⊃ ل) . ق	(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
	ص	ص	ك	ص
	ك	ص	ك	ص

(القائمة رقم ٣٩)

كما نستطيع تطبيق الطريقة المبسطة فى إستخدام القوائم لكى نعبر عن الاستدلال على النحو الآتى :—

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥

(القائمة رقم ٤٠)

وبما أن جميع القيم الواردة فى العمود رقم ٥ ، هى « ص » ، فإن ذلك يزودنا بصدق الدالة ، ومن ثم فإن الاستدلال الذى تعبر عنه إستدلال صحيح .

إلا أننا نستطيع ـ بشكل أكثر تبسيطاً ــ ولكى نستفيد فائدة أكبر من إستخدام المقدمات والنتائج ، فى الدالة اللزومية السابقة ، أن نضع إستدلالنا على النحو الآتى :ــ

(١)	(٢)	(٣)
ن ⊃ ل	ن	ل
ص	ص	ص
ك	ص	ك
ص	ك	ص
ص	ك	ك

(القائمة رقم ٤١)

فى هذه القائمة نلاحظ أن الأعمدة الثلاثة ١ ، ٢ ، ٣ تناظر الأعمدة ٣ ، ١ ، ٢ على الترتيب فى القائمتين السابقتين .

لكن كيف نعرف من هذه القائمة الجديدة ما إذا كان الاستدلال موضوع الحديث صحيحاً أو غير صحيح ؟ نلاحظ أننا بشىء من التعديل الطفيف فى طريقة إستخدام قائمة الصدق ، قد وضعنا الدالات الثلاث التى يتكون منها الاستدلال ، على شكل مقدمتين ونتيجة . وقد وضعنا الرقمين ١ ، ٢ فوق العمودين الأولين لكى نوضح أنهما المقدمتان (على خلاف ترتيبهما فى القائمتين السابقتين) ، ووضعنا الرقم ٣ فوق العمود الأخير لكى يعبر عن النتيجة .

الآن ، بناء على ما نعرفه عن العلاقة بين المقدمات والنتيجة فى الاستدلال الصحيح ، نبدأ فى ملاحظة الصفوف الأفقية بحثاً عن الحالات التى تكون فيها المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة .

فإذا كانت جميع الحالات التى تكون فيها المقدمتان صادقتين — فى القائمة — ذات نتيجة صادقة ، كان الاستدلال صحيحاً . أما لو صادفنا حالة واحدة فقط ، تكون فيها المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة ، كانت القائمة معبرة عن إستدلال غير صحيح .

فى مثالنا السابق ، نجد فى الصف الأول من القائمة أن كلا من المقدمتين والنتيجة صادقة ، وبما أنه لا توجد حالة واحدة تكون المقدمتان فيها صادقين والنتيجة كاذبة ، فإن هذا يعنى أن النتيجة الموجوده فى الاستدلال صادقة ، وأن الاستدلال صحيح .

ولنأخذ مثلا آخر لتأكيد هذا المعنى : لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا أضاء النور باللون الأحمر ، وجب عليك أن تتوقف عن السير . وأنت قد توقفت ، إذن فالنور قد أضاء باللون الأحمر) . وأردنا أن نتثبت من صحته ، فإننا نعبر عنه بالصيغة الرمزية التالية :

(ں ⊃ ل) . ل : ⊃ : ں

ثم نعبر عن هذه الدالة بقائمة الصدق الكاملة التالية :—

ق	ل	ق ⊃ ل	(ق ⊃ ل) . ل	(ق ⊃ ل) . ل : ⊃ : ق
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	<u>ك</u>
ك	ك	ص	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥
			(٢ ، ٣)	(١ ، ٤)

(القائمة رقم ٤٢)

أو بهذه القائمة المبسطة .

(ق ⊃ ل) . ل : ⊃ : ق

ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	<u>ك</u>
ك	ص	ك	ك	ص
١	٣	٢	٤	٥

(القائمة رقم ٤٣)

ونحن نلاحظ فى هاتين القائمتين أن العمود رقم ٥ يحتوى على ك ومعنى هذا أن الدالة لا تعبر عن تحصيل الحاصل ، بل هى ممكنة الصدق فقط ومن ثم فالاستدلال لا يكون صحيحاً .

كما يمكن التعبير كذلك عن هذه الدالة نفسها بالقائمة الأكثر تبسيطاً وإيجازاً ، والتي يمكن كتابتها على النحو الآتي :—

(١) ق ⊃ ل	(٢) ل	ق	
ص	ص	ص	√
ك	ك	ص	
ص	ص	ك	×
ص	ك	ك	

(القائمة رقم ٤٤)

وهي القائمة التي نضع فيها الإستدلال في صورة مقدمتين ونتيجة . فإذا ما بحثنا في القائمة عن المقدمتين الصحيحتين والنتيجة الصحيحة ، لوجدنا ذلك متحققاً في الصف الأول . لذا قد نميل في هـذه الحالة إلى إعتبار الإستدلال على أنه صحيح ، لكننا نكون قد تسرعنا في هذا الحكم بصحة الإستدلال لأننا نلاحظ في الصف الثالث بعد ذلك وجود مقدمتين صادقتين ونتيجة كاذبة . وهذه الحالة وحدها كفيلة بأن تجعل الاستدلال غير صحيح .

قائمة الصدق المزدوجة :

وأخيراً فنحن نستطيع أن نذكر طريقتين مختلفتين معاً من طرق إستخدام قوائم

الصدق ، وذلك فى قائمة واحدة لنسمها بالقائمة المزدوجة ، ولنأخذ لتوضيح ذلك قاعدة الرفع التالية :—

(ن ⊃ ل) . ~ل : ⊃ : ~ن

ن	ل	ن ⊃ ل	~ل	~ن	(ن ⊃ ل) . ~ل	: ⊃ : ~ن
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
				(١) →		(٢) ↑

(القائمة رقم ٤٥)

ويشير السهم رقم ١ فى هـذه القائمة إلى الصف الوحيد الذى نجد فيه مقدمتين صادقتين ونتيجة صادقة . وبمـا أنه لا وجود هنا لأى صف يحتوى على مقـدمتين صادقتين ونتيجة كاذبة ، فإن الاستدلال يكون صحيحا . أما السهم رقم ٢ فيوضح أن جميـع القيم الخاصة بالدالة كلها ، هى قيم صادقـة . وهـكذا يتضح لنا أن صورة الاستدلال تعبر عن تحصيل الحاصل ، وأنه إستدلال صحيح منطقياً كذلك .

رابعاً :

الـكشف عن الاتساق Consistency فى التعبيرات أو الدالات ، بغرض التوصل

إلى معرفة الاستدلات الصحيحة . ويقصد من كلمة « اتساق » فى المنطق الاتساق الذاتى Self - consistency أو عدم التناقض non - contradictoriness ، ومن ثم التعبير عن إمكان الصدق . ومن الواضح أننا نستطيع استخدام طريقة قائمة الصدق فى تحديد الاتساق . فاتساق ، أو إمكان صدق تعبير ما ، يبرهن عليه إذا وردت « ص » واحدة على الأقل فى العمود الأخير من قائمة الصدق الخاصة به ، كما يبرهن على إتساقه إذا كان العمود الأخير من دالة الصدق لا يحتوى إلا على « ك » فقط . ولنأخذ لذلك مثلا قائمة الصدق التالية :—

ق	ـ ق	ق (٧) ـ ق	ـ (ق (٧) ـ ق)	ق . ـ ق
ص	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك
	(١)	(٢)	(٣)	(٤)

(القائمة رقم ٤٥)

فى هذه القائمة نلاحظ :—

١ — أن الدالة رقم (١) ، أى (ـ ق) ولو أنها تعبر عن قول غير صحيح invalid ، لكنه متسق Consistent ، طالما أنها تعبر عن إمكان الصدق (إذ أنه إما صادق أو كاذب) .

٢ — إن الدالة رقم (٢) تعبر عن قول صحيح valid ، ومتسق فى الوقت نفسه ، لأنها لا تعبر فقط عن إمكان الصدق ، بل كذلك عن ضرورته .

٣ — الدالة رقم (٣) تعبر عن قول غير صحيح ، وغير متسق أيضاً .

٤ — الدالة رقم (٤) تعبر عن قول غير صحيح ، وغير متسق أيضاً .

الاتساق والاستـــدلال :

الواقع إن إختبار الاتساق والكشف عنه ، له أهمية كبيرة بالنسبة لمعرفتنا بمقدمات ونتائج الاستدلال . فإذا كانت مجموعة من المقدمات ، تنتهى بنا — بواسطة برهان صحيح — إلى نتيجة غير متسقة ، أى نتيجة غير ممكنة الصدق فى أى حالة من حالات مجموعات الصدق ، أى نتيجة كاذبة بالضرورة ، فإننا نكون على يقين من كذب إحدى المقدمات على الأقل . طالما أن الاستدلال الصحيح — كما سبق أن ذكرنا — هو الذى يحتوى على مقدمات صادقة ، تنتج عنها بالضرورة نتيجة صادقة . وهذا ما يتضح من المثال التالى :

ن	ل	~ ل	ل . ~ ل	ن ⊃ (ل . ~ ل)	~ ن	ن ⊃ (ل . ~ ل) : ⊃ : ~ ن
ص	ص	ك	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧

(القائمة رقم ٤٦)

وبعبارة أخرى فإن أية مقدمة مثل « ن » ، إذا كانت تستلزم النتيجة غير

المتسقة (ل . ~ل) فسوف يلزم عنها دائماً أن تكون «ى» ، أى المقدمة نفسها ، كاذبة .

هذا من جهة ، ومن جهة أخرى ، فيما يتعلق بالمقدمات غير المتسقة ، فإننا نعرف أن نتيجة الاستدلال الصحيح ، لا تكون صادقة إذا كانت المقدمات غير صادقة . وعلى ذلك يمكن رفض أى إستدلال لأول وهلة على أنه غير صحيح ، إذا كانت مقدماته غير متسقة . وتوضح قائمة الصدق التالية وتبرهن على أن أى زوج من القضايا فى حالة تناقض ، إذا ما وضع فى أية مجموعة من القضايا ، فإنه يحيل هذه المجموعة كلها إلى مجموعة غير متسقة :—

ى	ل	~ ق	ق . ل . ~ق
ص	ص	ك	ك
ص	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ك

(القائمة رقم ٤٧)

قائمة الصدق الموجزة الخاصة بالكشف عن الاتساق :

إن طريقة إستخدام قائمة الصدق الكاملة ، كما رأينا ، وإن كانت سهلة الاجراء ، بل وتكاد تكون آلية فى كيفية تحديد صحة أو إتساق أى تعبير أو دالة فى منطق القضايا . إلا أن تطبيقها مع ذلك يتطلب وقتاً طويلا . ولذا فإننا نستطيع إستخدام طريقة أكثر إختصاراً ولا تتطلب منا أكثر من إختيار أهم ما تفيده قائمة الصدق

الكاملة . ولنأخذ لذلك مثلا ، قائمة الصدق الكاملة لاستدلال غير صحيح ، وليكن الاستدلال التالى القائم على التنافر :—

~ (ق . ل) . ~ ق : ⊃ : ل

ق	ل	ق . ل	~ (ق . ل)	~ ق	~ (ق . ل) . ~ ق	~ (ق . ل) . ~ ق : ⊃ : ل
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ك
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧

(القائمة رقم ٤٨)

الواقع إن قراءة هذه القائمة بإمعان ، يكشف لنا عن عدم صحة الاستدلال الذى تعبر عنه الدالة ، لأن واحدة من مجموعات قيم الصدق الممكنة ، وهى التى تكون فيها « ق » ، « ل » ، كاذبتين معاً ، نتوصل منها إلى لزوم كاذب (فى الصف الرابع) بين المقدمات والنتيجة .

وبعبارة أخرى ، لو كانت ق ، ل كاذبتين معاً ، فإن علينا أن نصف نفى عطفهما ، أى « ~ (ق . ل) » بأنه صادق فى حين أن النتيجة وهى « ل » كاذبة . وبما أن القضية الصادقة لا تستلزم قضية كاذبة ، فإن المقدمتين فى هذه الحالة ، لا تستلزمان النتيجة . ولذا فالاستدلال يمكن أن يكون كاذباً ، ومن ثم فهو غير صحيح .

الآن ، نلاحظ أنه إذا لم يكن لنا هدف من تكوين القائمة السابقة إلا مجرد الكشف عن عدم الصحة أو الكذب الممكن بالنسبة للاستدلال موضوع الحديث ، فمما لا شك فيه أن هناك جزءاً كبيراً من العمل والجهد الذى قمنا به ، زائد عن الحاجة ، ومن ثم يمكن توفير الجهد والوقت الذى بذل فيه . فلم يكن من الضرورى أن نعرف أن المقدمتين تستلزمان النتيجة بالفعل فى ثلاث من الحالات الأربع الممكنة ، إذ أن المجموعة الرابعة فقط من مجموعات قيم الصدق هى التى تهمنا فقط . ولذا فهى التى يجب أن نقتصر فيها على المقدمة .

ولكن كيف نحدد هذه الحالة وحدها دون الحالات الأخرى الممكنة ؟ هل هناك طريقة إذن ، لكى نحدد بها مباشرة مجموعة قيم الصدق التى تجعل الإستدلال غير الصحيح كاذباً ، بدون أن نلجأ إلى كل المجموعات الممكنة ؟ من الممكن أن نقوم بذلك لو استخدمنا الطريقة التالية :— أن نقول أن الإمكان الوحيد للحصول على « ك » فى العمود الأخير الخاص بقائمة صدق إستدلال غير صحيح ، يحدث حينما يكون العمود الخاص بالمقدمتين (رقم ٦ فى القائمة السابقة) محتوياً على « ص » ويكون عمود النتيجة (رقم ٢ فى القائمة ذاتها) محتوياً على « ك » .

وعلى ذلك ، فإننا لكى نختبر صحة إستدلال ما :

١ — نفترض كذب نتيجته .

٢ — ثم إذا استطعنا بطريقة أو بأخرى أن نجعل المقدمتين صادقتين .

٣ — فإننا نكون قد برهنا على أن الاستدلال غير صحيح . لأن هذه الحالة ، حالة صدق المقدمات وكذب النتيجة ، سوف تكون هى الحالة الوحيدة التى يكون الاستدلال فيها كاذباً .

ولنحاول أن نطبق ذلك — بمثال الاستدلال غير الصحيح الذى إستخدمناه من قبل ، وذلك بإتباع الخطوات التالية :—

١ — نكتب التعبير الرمزى للاستدلال كما يلى :—

ـ (ق . ل) . ـ ق : ⊃ : ل

٢ — نكتب الحرف « ك » تحت النتيجة ، لكى نوضح أننا نفترض أنها كاذبة ، وذلك كما يلى :

ـ (ق . ل) . ـ ق : ⊃ : ل
ك

٣ — الآن ، إذا كانت ل كاذبة فى النتيجة ، فلابد وأن تكون كذلك فى المقدمتين ، ومن ثم فإننا نستطيع أن ننسب « ك » إلى المقدمتين ، فنضعها فيهما بدلا من ل ، وكذا فى النتيجة كما يلى :—

ـ (ق . ك) . ـ ق : ⊃ : ك

٤ — وبما أن الاختبار الذى نزمع القيام به ، يقوم على تكذيب النتيجة ، ومن ثم محاولة جعل المقدمات صادقة ، فإن الخطوة التى تتلو ذلك هى أن نفترض صدق المقدمة الثانية ، وهى (ـ ق) ، طالما أن المقدمتين معطوفتان ، وطالما أن قضية العطف لا تكون صادقة إلا إذا كانت كل قضية معطوفة فيها صادقة . ولذا فإننا نكتب :—

ـ (ق . ك) . ص : ⊃ : ك

٥ — الآن إذا كانت « ـ ق » صادقة (فرضاً) ، كانت « ق » كاذبة ، ولذا فإننا نكتب :—

ـ (ك . ك) . ص : ⊃ : ك

٦ — وبما إن القضية العطفية التي تتكون من قضايا معطوفة كاذبة ، تكون هى نفسها كاذبة ، فإننا نحصل على :—

ـ (ك) . ص : ⊃ : ك

٧ — وبما أن نفى القضية الكاذبة ، صادق ، إذن :

ص . ص : ⊃ : ك

٨ — لكن عطف أى قضيتين صادقتين ، يكون هو نفسه صادقاً ، وعلى ذلك فإننا نحصل على :—

ص ⊃ ك

٩ — وهكذا نكون قد نجحنا فى جعل المقدمتين صادقتين مع إفتراض كذب النتيجة ، أو بناء على هذا الافتراض - وبما أن القضية الصادقة لا تستلزم قضية كاذبة ، فإننا نكون ببساطة أمام مجرد كذب ، هو :

ك
―

وهذه على وجه الدقة هى « ك » التى ظهرت فى (الصف الرابع من العمود رقم ٧) من قائمة الصدق الكاملة رقم ٤٨ ، على أنها نتيجة لإمكان قيمة صدق قضيتين كاذبتين معاً . هكذا نكون قد وصلنا إلى هذه الحالة من الكذب مباشرة بإستخدام المبدأ القائل بأن الاستدلال غير الصحيح هو فقط ذلك الذى يمكن أن يحتوى على مقدمات صادقة ونتيجة كاذبة .

ومن الطبيعى أن تكون الخطوات الخاصة بتطبيق قائمة الصدق الموجزة ، هى

نفسها أكثر تركيزاً وإيجازاً مما هى عليه فى المثال السابق . فإختبار الاستدلال اللزومى التالى :—

(ں ⊃ ل) . ~ں : ⊃ : ~ل

الذى يكون فيه أحد المقدمين منفياً ، يمكن أن يتم على النحو الآتى :—

(ں ⊃ ل) . ~ں : ⊃ : ~ل

(ك ⊃ ص) . ص : ⊃ : ك

ص . ص : ⊃ : ك

ص : ⊃ : ك

ك

(القائمة رقم ٤٩)

فى هذا المثال الأخير ، تكون القضية « ~ل » هى النتيجة التى نفترض كذبها ، ومن ثم تكون « ل » فى المقدمة الأخرى صادقة . وبالمثل فإذا إفترضنا أن المقدمة « ~ں » صادقة ، كانت إذن « ں » كاذبة . ومن ثم بإتباع قواعد الإستدلال ، نصل إلى مقدمة هى « ص » ونتيجة هى « ك » . وهذا يعنى أن الإستدلال نفسه إستدلال غير صحيح لأن المقدمة الصادقة لا تلزم عنها نتيجة كاذبة .

ولكى تتضح هذه الطريقة الموجزة لقوائم الصدق ، فإننا نورد الملاحظات التالية :—

١ — إن الطريقة الموجزة لقائمة الصدق ، تبدو ملائمة تماماً وصالحة للبرهنة على عدم صحة إستدلال ما . لكن هل تصلح هذه الطريقة لإظهار أن إستدلالا ما صحيح ؟ لنطبق هذه الطريقة بالنسبة لقاعدة الإثبات التالية :

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

ونرى ما الذى ننتهى إليه ، وذلك كما يلى :

(ق ⊃ ل) . ق : ⊃ : ل

(ص ⊃ ك) . ص : ⊃ : ك

إذ أننا طالما قد إفترضنا كذب « ل » فى النتيجة ، فلابد وأن نحمل هذا الافتراض بالنسبة لوجود « ل » فى المقدمتين . وبما أننا نحاول جعل المقدمتين صادقتين ، فقد وضعنا « ص » بدلا من المقدمة الثانية ، وكذا بدلا من المقدم ، فى المقدمة اللزومية .

لكن المقدمة الأولى اللزومية تصبح دالة كاذبة ، لأن الدالة اللزومية تكون كاذبة حين يكون المقدم فيها صادقاً ويكون التالى كاذباً ، طالما أن المقدم الصادق لا يستلزم التالى الكاذب وعلى ذلك فإننا نكتب :

(ك . ص) ⊃ ك

وبما أن المعطوف الكاذب ، يجعل دالة العطف كلها كاذبة ، فإننا نحصل على :ـ

ك ⊃ ك

وهكذا نصل أخيراً ، بعد تكذيب النتيجة ، إلى أننا لم نستطع أن نجعل المقدمتين صادقتين . وعلى ذلك فالاستدلال لا يمكن أن يكون غير صحيح ، ومن ثم فلابد وأن يكون صحيحاً . فنكتب :

ص

وهكذا إستطعنا أن نثبت أن الاستدلال صحيح عن طريق إستحالة أن يكون غير صحيح .

قد يكون هناك من يسأل : إننا بعد تكذيب النتيجة ، إفترضنا صدق المقدمة الثانية ، فهل في إستطاعتنا أن نحصل على النتيجة ذاتها لو إفترضنا صدق المقدمة الأولى بدلا من الثانية ؟ للاجابة عن ذلك نقول ، إننا حين نجعل المقدمة اللزومية صادقة ، علينا أن نعتبر المقدمة الأخرى كاذبة (وإلا لما حصلنا على نتيجة كاذبة) وذلك كما يلي :—

(ن ⊃ ل) . ن : ⊃ : ل

(ك ⊃ ك) . ك : ⊃ : ك

ص . ك : ⊃ : ك

ك : ⊃ : ك

ص

(القائمة رقم ٥٠)

وهكذا فإننا نصل إلى نفس النتيجة السابقة في حالة افتراض صدق المقدمة الأولى .

٢ — إن الاستدلالات التي اختبرناها بطريقة قائمـة الصدق الموجزة ، كانت تحتوى في نتائجها على قضايا مفردة . فهل تصلح هذه الطريقة في حالة النتائج المركبة ؟

إننا نستطيع استخدام الطريقة ذاتها بشكل مثمر ومفيد بالنسبة للاستدلالات التي تحتوى على نتائج مركبة من أكثر من قضية . فمتسلسلة اللزوم التالية مثلا يمكن اختبارها على النحو الآتي :—

(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م)

(ص ⊃ ص) . (ص ⊃ ك) : ⊃ : (ص ⊃ ك)

ص . ك : ⊃ : ك

ك : ⊃ : ك

ص

(القائمة رقم ٥١)

فلكى نفترض أن النتيجة (ن ⊃ م) كاذبة ، فإن هذا يعنى : (ص ⊃ ك) ، لأن هذه هى الحالة الوحيدة التى تؤدى إلى كذب النتيجة اللزومية ، وأعنى بها تلك الحالة التى يكون فيها المقدم « ن » صادقاً فى حين تكون النتيجة « م » كاذبة. فإذا ما حملنا قيم الصدق هذه إلى المقدمتين ، فسنجد إننا كى نجعل المقدمة الأولى (ن ⊃ ل) صادقة ، فلا بد وأن يكون التالى فيها « ل » صادقاً ، وهو ما يجعل المقدمة الثانية (ل ⊃ م) كاذبة . (وقد كان باستطاعتنا أيضاً أن نجعل المقدمة الثانية صادقة ، لو فرضنا كذب «ل» ، إلا أن ذلك كان يوجب علينا القول بكذب المقدمة الأولى (١)) . وهكذا لأننا لم نستطع أن ننتهى إلى صدق المقدمتين فى حالة افتراض كذب النتيجة ، فإننا ننتهى إلى القول بأن الاستدلال صحيح .

---

(١) فى هذه الحالة تصبح القائمة على النحو الآتى :ـــ

(ن ⊃ ل) . (ل ⊃ م) : ⊃ : (ن ⊃ م)

(ص ⊃ ك) . (ك ⊃ ك) : ⊃ : (ص ⊃ ك)

ك . ص : ⊃ : ك

ك : ⊃ : ك

ص

ولنأخذ مثلا آخر يوضح هذا المعنى ، فى حالة كون النتيجة دالة فصليـة ، كما هو الحال فى الاحراج المركب الآتى :—

(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ق ∨ م) : ⊃ : (ل ∨ ن)

وذلك على النحو الآتى :—

(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ق ∨ م) : ⊃ : (ل ∨ ن)
(ك ⊃ ك) . (ك ⊃ ك) . (ك ∨ ك) : ⊃ : (ك ∨ ك)
ص . ص . ك : ⊃ : ك
ك : ⊃ : ك
ص

(القائمة رقم ٥٢)

إذ بما أنه لا توجد إلا طريقة واحدة لتـكذيب النتيجة الفصلية (ل ∨ ن) ، إلا حين تـكون كل من « ل » ، « ن » كاذبتين معاً ، جاز لنا أن نحمـل قيم الصدق هذه إلى المقدمات . ولذا فنحن بافتراضنا صدق المقدمتين اللزومتين (١) ، يلزم أن نعتبر المقدمة الفصلية قضية كاذبة .

---

(١) كما يمـكننا أن نصل إلى النتيجة ذاتها لو افترضنا صدق المقدمة الفصليـــة (ق ∨ م) وذلك كما يلى :

(ق ⊃ ل) . (م ⊃ ن) . (ق ∨ م) : ⊃ : (ل ∨ ن)
(ص ⊃ ك) . (ص ⊃ ك) . (ص ∨ ص) : ⊃ : (ك ∨ ك)
ك . ك . ص : ⊃ : ك
ك : ⊃ : ك
ص

وهكذا فنحن بإظهارنا أن عطف المقدمات (فى الصف الثالث) ، هو دالة عطفية كاذبة ، وبالتالى صحة الاستدلال ، نكون قد توصلنا بشكل موجز وسريع ، إلى نفس النتيجة التى كنا نحصل عليها من قائمة صدق تتكون من ١٦ مجموعة من مجموعات قيم الصدق أو من ١٦ من الصفوف .

٣ — أما حينما تكون نتيجة الاستدلال قضية عطفية ، أو معبرة عن فصل قوى ، فسيكون لدينا أكثر من إمكان واحد لتكذيب هذه النتيجة ، كما لن تكون الطريقة الموجزة اقتصادية توفر الوقت والجهد على النحو الذى نتصوره أو نرجوه . فعطف قضيتين مثلا يمكن أن يكون كاذباً فى حالات ثلاث هى :—

(ا) حين تكون إحدى القضيتين المعطوفتين كاذبة .

(ب) أو تكون القضية المعطوفة الأخرى كاذبة .

(حـ) أو حين تكون القضيتان المعطوفتان كاذبتين معاً .

وعلى ذلك فلابد من القيام بثلاثة تطبيقات مستقلة للطريقة الموجزة حتى نختبر صحة مثل هذا الاستدلال . (وسنحتاج إلى تطبيقين فى حالة تكذيب النتيجة المعبرة عن الفصل القوى) .

أما إذا كان مثل هذا الاستدلال محتوياً على ثلاث أو أربع قضايا أساسية ترد فى الدالة العطفية ، فستكون قائمة الصدق الكاملة التى نكتبها لهذا الاستدلال من ٨ صفوف أو ١٦ صفاً ، ومن ثم يكون تطبيق الطريقة الموجزة أفضل فى هذه الحالة من حيث اختصار الوقت وتوفير الجهد . أما إذا كان الاستدلال مقصوراً على قضيتين إثنتين فقط ، فإن استخدام قائمة الصدق الكاملة قد يكون أفضل من استخدام الطريقة الموجزة .

٤ — بقى بعد ذلك سؤال : لو كانت لدينا دالة تكافؤ ، مثـــل أحد قانونى دى مورجن ووسمناه لـكى يشتمل على ثلاثة متغيرات بدلا من متغيرين على النحو الآتى :—

~(ق . ل . م) ≡ (~ ق ∨ ~ ل ∨ ~ م)

هل تصلح القائمة الموجزة لبيان صحة هذا التكافؤ ؟

وبعبارة أخرى ، هل القائمة الموجزة خاصة بالكشف عن مدى صحة الاستدلال أم عن مدى صحة عبارة التكافؤ ؟

الواقع أن التكافؤ بين القضايا هو لزوم متبادل ، أو هو استدلال مشترك . ولذا فإننا فى مثل هذه الحالة نستخدم قائمتين موجزتين ، كل واحدة منهما خاصة بأحد الاستدلالين المتضمنين فى التكافؤ . وبعبارة أخرى نستخدم قائمة موجزة مزدوجة للتعبير عن صحة هذه الصيغة وذلك كما يلى :—

أن الصيغة الرمزية يمكن أن تنحل إلى قضيتى اللزوم التاليتين :—

(أ) ~(ق . ل . م) : ⊃ : (~ ق ∨ ~ ل ∨ ~ م)

(ب) (~ ق ∨ ~ ل ∨ ~ م) : ⊃ : ~(ق . ل . م) .

ومن ثم :—

~(ق.ل.م) ⊃ (~ق∨~ل∨~م)	(~ق∨~ل∨~م) ⊃ ~(ق.ل.م)
~(ص.ص.ص) ⊃ (ك ∨ ك ∨ ك)	(ك ∨ ك ∨ ك) ⊃ ~(ص.ص.ص)
~ص ⊃ ك	ك ⊃ ~ص
ك ⊃ ك	ك ⊃ ك
ص	ص

(القائمة رقم ٥٣)

بهذه الطريقة نكون قد وفرنا ربما نصف الوقت المطلوب لتكوين قائمة صدق كاملة توضح أن دالة التكافؤ المذكورة دالة صحيحة .

هكذا ننتهى إلى القول بأننا نستطيع استخدام أكثر من نوع من أنواع قوائم الصدق ، نلخصها فى الآتى :—

١ — قوائم الصدق الكاملة مثل القوائم رقم ١٢ ، ١٣ ، ١٥ وغيرها .

٢ — قوائم الصدق المبسطة مثل القائمة رقم ١٦ وغيرها .

٣ — قوائم الصدق الأكثر تبسيطاً مثل القوائم رقم ١٧ ، ٣٠ ، ٣٨ ، ٤٠ وغيرها .

٤ — قوائم الصدق المزدوجة الخاصة بتحصيل الحاصل ، مثل القائمة رقم ٤٥ وغيرها .

٥ — قوائم الصدق الموجزة مثل القوائم ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ وغيرها .

٦ — قوائم الصدق المزدوجة الخاصة بالتكافؤ ، مثل القائمة ٥٣ .

٧ — فضلا عن طريقة فتجنشتين فى استخدام الأقواس للتعبير عن مجموعات الصدق .

الفصل الرابع

الحساب التحليلى لدالات القضايا

Calculus of Propositional Functions

دالات القضايا :

الواقع أن صور الاستدلال السابق ذكرها فى الفصلين الخاصين بحساب الفئات وحساب القضايا ، لا يمكن تطبيقها بالنسبة لكثير من الاستدلالات العادية . ويمكن التعبير عن ذلك بشكل أكثر دقة ، لو قلنا إن حسابى الفئات والقضايا لا يكفيان للتعبير عن جميع القضايا والاستدلالات ، وذلك للأسباب التالية :—

١ — أن حساب القضايا لا يهتم بالقضايا — كما ذكرنا من قبل — من حيث مكوناتها (أو الحدود التى تتألف منها) ، بل يتناول القضية ككل واحد ، ومن ثم يبحث فى الإجراءات التى تتخذ حيالها ، والعلاقات التى يمكن أن تنشأ بينها ، ولذا فقـــد إستخدمنا المتغيرات ق ، ل ، . . . للتعبير عن القضايا ، أياً كانت « ق » أو « ل » . ولو ضربنا لذلك مثلا لقلنا : (أن علاقة اللزوم مثلا لا تخبرنا بشىء عن تحليل القضية من حيث مكوناتها ، بل تخبرنا عن علاقة تقوم بين قضية ، أو قضايا ، كمقدمة أو مقدمات ، وبين قضية أخرى كنتيجة . وهذا ما ينطبق بالنسبة لغير ذلك من الإجراءات والعلاقات فى حساب القضايا) [1] .

ولهذا السبب فإننا ننتهى إلى أن حساب القضايا لا يغنينا عن دراسة تستهدف معرفة مكونات القضايا أيضاً . أى دراسة (تتجه إلى تحليل البنية المنطقية للقضايا ،

---

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic. P. 341

ومنها إلى الحساب التحليلى للدالات) (١) .

٢ — إذن هل يفي حساب الفئات بهذا الغرض ؟ حقاً إن هذا الحساب يتناول الفئات من حيث هى مكونات القضايا . لكننا حين تناولنا قضايا الفئات ، وخاصة من حيث الكم فيها ، قسمناها إلى قضايا كلية ، وقضايا وجودية (جزئية أو مفردة) بناء على معرفة كم الموضوع مع إغفالنا ما يتعلق بالمحمول وبالكم الخاص به . وعلى ذلك فالحساب الذى أوردناه للفئات (ولقضايا الفئات) ، قاصر عن أن يستوفى الكم الخاص بجميع مكونات القضية . فضلا عن قصوره عن بلوغ التحليل الدقيق والكامل للبنية المنطقية للقضايا .

وهكذا ، فبما أن الحساب التحليلى السابق — بنوعيه — لا يفى بالغرض ، فإن علينا أن نبحث عن نوع جديد من الرمزية المنطقية (٢) يفى بمثل هـــذا الغرض ، (ويعتبر خطوة متطورة فى المنطق المعاصر تتجاوز فى تطورها حساب القضايا) ،(٣) وكذا حساب الفئات ، فضلا عن المنطق الحملى القديم بصفة عامة .

ويسمى هذا النوع من الحساب التحليلى المنطقى — بالإضافة إلى الإسم الذى ذكرناه فى بداية هذا الفصل ، وهو الحساب التحليلى لدالات القضايا — بأسماء متعددة . فيرد عنـــد كوين Quine, W.V.O. فى كتابه « المنطق الرياضى » (٤) مرتبطاً بنظريته العامة فى التسوير Quantification ، كما يرد فى بعض كتب المنطق تحت إسم « الحساب التحليلى للمحمول » Predicate calculus ، مثل كتاب

---

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 80

(٢) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 56.

(٣) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 341.

(٤) Quine, W.V.O. : Mathematical Logic, (ch. II), P. 63.

« المنطق الصورى » لموران Mourant, J. A. (١) وكتاب « المنطق المعاصر ، والصياغة الصورية » لروجيه مارتن(٢) Roger Martin ، وكتاب «مقدمة للمنطق الرمزى » لرودلف كارنب Carnap, R. (٣) وغيرها من الكتب التي تأثرت بهذه التسمية التي ذهب إليها هيلبرت Hilbert, D. ، وأكرمان Ackermann, W. فى الطبعة الثانية لكتابهما « أسس المنطق الصورى » (٤) وذلك حين غير أكرمان من استخدام تعبير « حساب الدالة » Funktionenkalkul الوارد فى الطبعة الأولى وجعله « حساب المحمول » Pradikatenkalkul فى الطبعة الثانية (٥) . (وهكذا يصبح إسم « المحمول » Pradikat الذى يستخدمه هيلبرت وأكرمان ، دالا على نفس الأشياء التي نسميها باسم « دالات القضايا » (٦) .

---

(١) Mourant, J. A.: Fomal Logic, (ch. III, P. 339).

(٢) Martin, R.: Logique Contemporaine et Formalisation (pp. 71–81, 166).

(٣) Carnap, R.: Introduction to Logic, P. 38

(٤) «Grundzuge der Theoretischen Logik» عام ١٩٣٧ وكانت طبعته الأولى عام ١٩٢٨ . وقد ترجم إلى اللغة الإنجيزية عن الطبعة الثانية (من الترجمة ، « مبادىء المنطق الرياضى » عام ١٩٥٠ Principles of Mathematical Logic

(٥) وفى هذا الصدد يقول أكرمان فى مقدمة الطبعة الثانية (من الترجمة الانجليزية، صفحة IX) مايلى :

(لقد تم تغيير المصطلحات فى هذه الطبعة بما يتفق مع المصطلحات الواردة فى كتاب هيلبرت وبرنايز «أسس الرياضيات» . فمثلا قد وضعنا فى هذه الطبعة مصطلح حساب المحمول بدلا من « حساب الدالة » ، حيثما ورد فى الطبعة الأولى) .

(٦) Church, A.: Introduction to Mathematical Logic, Vol. I, P. 289

والواقع أن الاختلاف فى تسمية دالات القضايا لا ينصرف فقط إلى ما ذهب إليه هيلبرت وأكرمان ويبرنايز من القول بحساب المحمول ، إذ يستخدم تارسكى فى كتابه « مقدمة للمنطق » المصطلح : « الدالة الجملية » أو (دالة القضية) Sentential function (١) ، كما يستخدم كواين المصطلح « مصفوفة العبارة » Statement matrix(٢) ، فى حين يفضل كل من هارولد لى .Lee, H وسوزان لانجر .Langer,S استخدام المصطلح « صورة القضية » Propositional Form . فيذهب هارولد لى فى كتابه « المنطق الرمزى » إلى القول التالى : (لقد أسميت الرموز : س (س،ص) و . . . وغيرها بصور القضية ، وأنا فى هذا أتبع المصطلح الذى إستخدمه Sheffer, H, M, شيفر . . . ويلاحظ أن هوايتهد Whitehead, A, N, ورسل Russell, B, يسميان هذه الرموز فى كتابهما « المبادىء الرياضية » بدالات القضايا . ولعل استخدامهما لكلمة دالة Function راجع إلى تأثرهما بالأساس الرياضى)(٣) . كما تعبر عن هذا المعنى نفسه سوزان لانجر فى كتابها « مقدمة للمنطق الرمزى » بقولها : (إن أغلب كتب المنطق الرمزى ، وخاصة كتاب « المبادىء الرياضية » لهوايتهد ورسل ، تسمى مثل هذا التعبير الذى يأخذ صورة القضية ، لكنه يحتوى على متغير واحد على الأقل ، باسم دالة القضية . وعندى أن هذه التسمية ليست موفقة ، لأنها لا تكاد تعطى مفهوماً واضحاً وضوحاً كاملا عند الذين ليسوا على دراية كاملة بالرياضيات . والواقع أن أصل هذه التسمية يتضح بما فيه الكفاية ، لو تذكرنا أن

---

(١) Tarski, A, : Introduction to Logic, p, 5

وقد فضلنا ترجمتها بدالة القضية بدلا من الدالة الجملية فى ترجمتنا العربية لهذا الكتاب .

(٢) Quine, W, V, O, : Mathematical Logic, p, 32

(٣) Lee, H, N, : Symbolic Logic, p, 26

كبار مؤسسي المنطق الرمزى — مثل بول Boole, G، وفريجة Frege, G، وشرويدر Schroder, E.، وبيانو Peano,G, وهوايتهد ورسل وغيرهم — كانوا أساساً من الرياضيين، الذين كانت توحى إليهم، الصورة المنطقية الفارغة وقيمها، بلفظ الدالة والقيم من الرياضيات . ومن ثم فقد أصبح المتغير الذى تكون قيمه قضايا، يسمى « بدالة القضية »، وأصبح يرد بصفة عامة فى كتب المنطق بهذا الاسم. لكن كلمة « دالة » Function متعددة المعانى ، لذا فإننى سوف أستخدم إسماً أكثر وضوحاً، وإن كان أقل تداولا ــ وهو «صورة القضية» Propositoual form(١). إلا أننا سوف نتبع فى هذا الكتاب التسمية الأولى أى « دالات القضايا » ، وقد فضلنا استخدام هذا المصطلح للأسباب الآتية :ـ

أولا : لورود هذا المصطلح لدى أغلب المناطقة المعاصرين مثل : رسل وهوايتهد فى كتابهما « المبادئ الرياضية » Principia Mathematica ، ورسل فى كتابيه « أصول الرياضيات » ، و « مقدمة للفلسفة الرياضية »(٢) ، وتشيرش فى كتابه « مقدمة للمنطق الرياضى »(٣) وهانز رايشنباخ Reichenbach,H, فى كتابه « عناصر المناطق الرمزى »(٤) وغيرهم .

ثانياً : إن كلمة « دالة » مستخدمة بالفعل فى كتب المنطق المكتوبة باللغة العربية مترجمة كانت أو مؤلفة(٥) . ومن ثم فالكلمة كادت أن تستقر ويثبت إستخدامها فى كتب المنطق العربية ، ولا يوجد مبرر قوى يدعو إلى تغييرها .

---

(١) Langer, S, : An Introduction to Symbolic Logic, pp, 90-91

(٢) ولهذين الكتابين ترجمة عربية ، أنظر قائمة المراجع فى آخر هذا الكتاب .

(٣) Church, A, : Introduction to Mathematical Logic, p. 289

(٤) Reichenbach, H· : Elements of Symbolic Logic, p,80

(٥) فقد أوردها الدكتور زكى نجيب محمود فى كتابه « المنطق الوضعى » =

ثالثا : إن كلمة « دالة » مستمدة أساسا من الرياضيات ، ونحن نرى – مع رسل وفتجنشتين وغيرهما من المناطقة المعاصرين – الرابطة القوية التى تربط المنطق والرياضيات ، ومن ثم فلا غضاضة هناك من استخدام كلمة دالة فى المنطق .

والآن ، ما هى دالة القضية ؟ للاجابة عن هذا السؤال علينا أولا أن نعرف ما هى الدالة function ؟

الدالة فى الرياضة تصور يعبر عن عدم الانفصال ، أو عن العلاقة بين عنصرين فى مجموعتين متعلقتين . ويعرفها ديريشليه Dirichlet على النحو الآتى : (إن دالة للتغير س ، بالنسبة لمجال معين ، هى الكمية ص ، التى تفترض قيمة محدودة لكل قيمة من قيم س)(١) . ولنأخذ هذا المثال لتوضيح ذلك : ففى التعبير « س+١٢ » من مجال الرياضيات نجد أن قيمة حاصل الجمع ، إنما تتوقف على معنى س أو قيمتها . ولذا يسمى هذا التعبير بأنه دالة س (٢) . فإذا طبقنا ذلك بالنسبة للمنطق ، أمكننا القول بأن دالة القضية هى التعبير الذى لا يعطي معنى محدد ، ومن ثم لا يقدم لنا خبرا يحتمل الصدق أو الكذب ، طالما أنه يحتوى على حد أو حدود غير متعينة القيمة مثل « س » فى دالة القضية التالية : –

« س إنسان »

= والدكتور عبد الرحمن بدوى فى كتابه « المنطق الصورى والرياضى » ، كما وردت فى الترجمة العربية لكتابى رسل « أصول الرياضيات » و « مقدمة للفلسفة الرياضية » ، وفى الترجمة العربية لكتاب يان لوكاشيفتش « نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصورى الحديث » ، وغير ذلك .

(١) Carruccio, E. : Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought, P. 306.

(٢) Langer, S. : An Introduction to Symbolic Logic, P. 319.

فمثل هذا القول يعتبر دالة قضية ولا يعتبر قضية طالما أن الموضوع « س » غير محدد . أما لو استبدلنا بـ « س » لفظا آخر مثل « سقراط » ، تحولت هذه الدالة إلى القضية التالية : —

« سقراط إنسان » ،

التي يمكن الحكم عليها بالصدق أو بالكذب . وكذلك لو وضعنا بدلا من « س » لفظا ثانيا مثل « أفلاطون » ، لتحولت الدالة إلى قضية صادقة هي : « أفلاطون إنسان » . ومن ثم فإننا ننتهي إلى القول بأن التعبير « س إنسان » دالة قضية تتحول إلى قضية لو وضعنا فيها بدلا من الرمز « س » أي لفظ يتفق مع المحمول « إنسان » مثل سقراط ، أفلاطون ، أرسطو . فنحصل على القضايا : —

١ — سقراط إنسان

٢ — أفلاطون إنسان

٣ — أرسطو إنسان . . . .

ويكون التعبير « س إنسان » في هذه الحالة دالة قضية لأي واحدة من القضايا الثلاث السابقة ، أو كأنه على حد تعبير رسل (صورة تخطيطية لأي واحد من فصل [أي فئة] بأجمعه من القضايا)(١) .

وعادة ما تأخذ الموضوعات والمحمولات في المنطق المعاصر أسماء أخرى ، فنستخدم بدلا من « س » كلمة « متغير » Variable في مقابل كلمة « ثابت » Constant ،

---

(١) برتراند رسل : أصول الرياضيات (ترجمة د . محمد مرسي أحمد ، د . أحمد فؤاد الأهواني) ، الجزء الأول ، صفحة ٤٥ .

ونستخدم بدلا من « إنسان » كلمة « دالة » function . وفيما يلى أهم المصطلحات الخاصة بحساب دالات القضايا : ـ

أولا : المتغيرات والثوابت :

المتغيرات رموز ليس لها معنى بذاتها(١) بل هى تدل على مجهولات يمكن أن توضع بدلا منها أسماء لأشياء معينة ثابتة . ويسمى ما يوضع بدلا من مجهول أو مجهولات المتغير ، بقيمة أو قيم هذا المتغير . ومن ثم يمكن تعريف المتغير بأنه (ذلك الرمز الذى يكون معناه شبيها بمعنى إسم العلم أو الثابت ، باستثناء إمكان إستبدال الدالة المفردة الخاصة بالثابت ، بإمكان تعدد قيم المتغير) (٢) .

وهكذا فاننا نسمى « س » فى المثال السابق « س إنسان » بالمتغير الذى تكون له قيم Values مختلفة ، مثل (أفلاطون ، سقراط ، محمد ، على . .) . كما نسمى العبارة « س إنسان » بدالة القضية . وعلى ذلك فاننا نعرف دالة القضية بشكل مبسط بأنها تلك العبارة التى تحتوى على متغير واحد على الأقل . أما القيم التى يمكن أن توضع بدلا من المتغير فى دالة القضية فتحيلها إلى قضية يمكن الحكم عليها بالصدق أو بالكذب ، فتسمى بالثوابت Constants (والثابت بهذا المعنى يكون مراد فالاسم العلم ذى الدلالة) (٣) ، أو هو (ما يجب أن يكون شيئا محددا تحديدا مطلقا ، شيئا لا إبهام فيه ألبتة) (٤) ، بحيث لا يتغير معناه رغم إختلاف مواضعه . مثل كلمة « أفلاطون » التى يكون معناها ثابتا سواء قلنا : « أفلاطون فيلسوف » أو « أفلاطون أثينى » أو « أفلاطون إنسان » .

---

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 5.

(٢) Church, A. : Introduction to Mathematical Logic, P. 9.

(٣) المرجع السابق ، للوضع نفسه .

(٤) رسل : أصول الرياضيات ، الجزء الأول ، صفحة ٣٥ .

هذا وقد يشبه أحيانا دور المتغيرات فى دالة القضية ، بدور الثغرات أو المسافات الخالية فى قوائم الاستبيان questionnaire . وكما أن الاستبيان لا يصبح ذا مضمون محدد إلا بعد ملء الفراغات الموجودة به ، فكذلك لا تصبح دالة القضية ، قضية حقيقية إلا بعد وضع ثوابت معينة بدلا من المتغيرات(١) . ولقد عبر رايشنباخ عن مثل هذا المعنى بقوله : (لنأخذ مثلا لذلك التعبير التالى « . . . طويل » . فنحن حين نملأ الفراغ الموجود فى هذا التعبير باسم علم مناسب ، فإن هذا التعبير يتحول إلى قضية يتوقف صدقها أو كذبها على إسم المجهول الذى اخترناه . وهكذا قد تكون القضية « بطرس طويل » صادقة ، بينما قد تكون القضية « بول طويل » كاذبة . فى مثل هذه الحالة فإننا نقول بأن الجملة الناقصة التالية « . . . طويل » هى دالة قضية)(٢) . ولعل هذا هو السبب فى تعريف رايشنباخ دالة القضية على أنها (قالب أو صورة نصب فيها مضمونا أو محتوى ما)(٣) ، وهو نفس المعنى الذى عبر عنه رسل بقوله : (ما دالة القضية ؟ دالة القضية إذا قامت وحدها فقد تؤخذ على أنها مجرد هيئة ، مجرد غلاف ، قابل ، فارغ للمعنى ، لا على أنها شىء له دلالة سابقة) (٤).

هكذا يمكننا توضيح معنى دالة القضية ، بعد أن عرفنا المتغير والثابت ، فنعرفها بأنها :

(عبارة تشتمل على مكون غير محدود [أى متغير] أو أكثر ، بحيث لا تصبح العبارة قضية إلا عند تعيين قيم المكونات) (٥) ، أو بأنها (ذلك التعبير الذى يتضمن

---

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 5.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 82

(٣) المرجع السابق ، صفحة ٨٦ .

(٤) رسل : مقدمة الفلسفة الرياضية . (ترجمة د . محمد مرسى أحمد ، مراجعة د . أحمد فؤاد الأهوانى) صفحة ٢٢٩ .

(٥) المرجع السابق ، صفحة ٢٢٧ .

متغيرات ، والذى يصبح قضية ذات معنى لو وضعنا ثوابتا بدلاً من المتغيرات الواردة فيه) (١)

المحمـولات :

لو رجعنا إلى المثال السابق ، وهو دالة القضية (س إنسان) للاحظنا أننا نستطيع أن نضع بدلا من المتغير « س » الثوابت التالية : « سقراط » ، « ارسطو » ، فنحصل فى كل مرة نضع فيها ثابتا من هذه الثوابت على قضية صادقة . وتسمى الثوابت التى توضع بدلا من المتغير فنحصل منها على قضايا صادقة ، بالقيم التى تستوفى Satisfying دالة القضية (٢)

ولنفرض الآن أننا وضعنا بدلا من المتغير « س » فى دالة القضية السابقة ، الثابت التالى : « هذا القط » ، فإننا نحصل على القضية « هذا القط إنسان » وهى قضية كاذبة . أما لو وضعنا بدلا من المتغير « س » ، كلمة « الفضيلة » فى دالة القضية السابقة ، لحصلنا على عبارة خالية من المعنى وهى : « الفضيلة إنسان » . وتسمى الثوابت التى توضع بدلا من المتغير فى دالة القضية ، فنحصل بواسطتها إما على قضايا كاذبة ، أو على عبارات لا معنى لها ، تسمى بالقيم التى لاتستوفى دالة القضية . وبعبارة أخرى فكل القيم التى لا تحيل دالة القضية إلى قضية صادقة ، هى قيم لاتستوفى دالة القضية .

لـكن كيف نميز بين القيم التى تستوفى دالة القضية ، وتلك التى لا تستوفيها ؟ كيف نعرف أن هذا الثابت الذى سوف نضعه بدلا من المتغير « س » سيحيل دالة

---

(١) *Tarski, A. : Introduction to Logic. P. 5.*

(٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

القضية إلى قضية صادقة . لنأخذ المثال الآتي (١) من مجال الرياضيات ، ولنفرض أن لدينا دالة القضية التالية : « س ≥ ٣ » فاننا نلاحظ أن الأعداد ١ ، ٢ ، ٢ ١/٢ مثلا هي التي تستوفى الدالة ، فى حين أن الأعداد ٣ ، ٤ ، ٤ ١/٢ لاتستوفى هذه الدالة.
كيف عرفنا إذن أن المجموعة الأولى من الأعداد تستوفى الدالة فى حين لاتفعل ذلك المجموعة الثانية ؟ عرفنا ذلك بناء على معرفتنا بمعنى « أصغر من ٣ » أو « س ≥ » . فالأعداد ١ ، ٢ ، ٢ ١/٢ كلها أصغر من ٣ بالفعل ، أما الأعداد ٣ ، ٤ ، ٤ ١/٢ فهى ليست أصغر من ٣ . وعلى ذلك فهناك مجموعة من القيم (الأعداد) تصلح لأن توضع مكان المتغير لـكى تستوفى الدالة ، ويكون مجال هذه المجموعة من القيم محدوداً بذلك الجزء الآخر (غير المتغير) من الدالة ، وهو « أصغر من ٣ » .
لو طبقنا ذلك على دالة القضية « س انسان » فى المنطق ، لقلنا ان مجموعة القيم التى تستوفى دالة القضية ، إنما تتوقف على لفظ « انسان » . فالثابت الذى يمكن أن يتصف بالصفة « إنسان » يكون من بين القيم التى تستوفى دالة القضية ، أما الثابت الذى لا يمكن اتصافه بصفة « انسان » فلا يكون من بين القيم التى تستوفيها . وبما أن كلمة « إنسان » هى — فى المنطق التقليدى القديم — المحمول فى كل قضية مثل (سقراط انسان) تنتج عن دالة القضية « س إنسان » ، فإننا ننتهى إلى أن المحمول « إنسان » هو الذى يحدد مجال قيم للتغير فى دالة القضية « س انسان » ، وبمعنى آخر ، هو دالة « س » (٢)

وهكذا فإننا نميز فى دالة القضية السابقة (س انسان) بين المتغير « س » ، وبين المحمول أو الدالة « انسان » . الآن لو أردنا أن نعبر عن هذا المحمول تعبيرا رمزيا،

---

(١) هذا المثال مأخوذ من كتاب « مقدمة للمنطق » لتارسكى . (المرجع السابق) ، صفحة ٦

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 81.

فإننا نستخدم الرمز « د »(١) أو « ى » تعبيرا عنه كدالة للمتغير « س » . ومن ثم يمكننا أن نكتب دالة القضية السابقة بطريقة رمزية على النحو الآتى : —

د (س)

أو بشكل أكثر تبسيطا : د س .

وأعود مرة أخرى فأقول ، أن علينا أن نفرق بين المصطلحين التاليين فلا نخلط بينهما : —

١ — دالة القضية Propositional Function مثل « د (س) » أو د س .

٢ — وبين الدالة Function ، وهى ذلك الجزء من دالة القضية ، والذى يعتبر داله بالنسبة للمتغير « س » الوارد فى دالة القضية .

تصنيف الدالات طبقا لعدد المتغيرات :

من الأمثلة السابقة نلاحظ أننا كنا نستخدم متغيرا واحدا فى دالة القضية، لكن ليس من الضرورى أن تكون دالة القضية ذات متغير واحد فقط ، فهى يمكن أن تكون ذات متغيرين أو ثلاثة متغيرات أو أكثر .

١ — لنفرض أن لدينا العبارة التالية : —

« محمد أطول من على » .

ولنحاول التعبير رمزيا عنها . فى مثل هذه العبارة نقوم بوضع متغيرات بدلا من

---

(١) وهو أول حرف من حروف كلمة « دالة » . وعادة ما تستخدم فى الكتب الأجنبية الرموز المعبرة عن الدالات من حروف الأبجدية اليونانية مثل φ ، ψ وغيرها .

إسمى العلم « محمد » ، « على » ، مثلا س ، ص على الترتيب . ومن ثم فإننا نكتب العبارة على النحو الآتى : —

(س أطول من ص)

وعلى ذلك سكون صفة « أطول من » هى دالة المتغيرين س ، ص . وبما أننا نكتب رمز الدالة أولا قبل رمز المتغير ، فإننا تستطيع التعبير عن القول السابق بدالة القضية التالية :

د (س ، ص) .

وهى دالة قضية ذات متغيرين . ويلاحظ فى هذه الحالة أننا نقول : —

(ا) أن الدالة « د » ذات متغيرين(١) .

(ب) وأن دالة القضية كلها ، هى كذلك ذات متغيرين .

ولنقارن الآن بين القضيتين التاليتين : —

١ — « أفلاطون إنسان » : د س .

٢ — « محمد أطول من على » : د (س ، ص) .

فإننا نلاحظ أن الأولى تتكون تقليديا من موضوع ومحمول ، وقد إعتبرنا أن المحمول هو الدالة فيها حين عبرنا عنها بدالة القضية « د س » . أما القضية الثانية فلا تتكون فى حقيقتها من موضوع ومحمول ، بل هى قضية علاقية بالدرجة الأولى . بمعنى أن هناك حدين هما « محمد » ، « على » يرتبطان بعلاقة هى « أطول من » ، شأنها فى هذا شأن القضايا العلاقية التالية « س على يمين ص » ، « محمد يحب

---

(١) ويسميها رايشنباخ بالدالة ذات الموضعين .
Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 83.

صديقه » ، وغير ذلك من العبارات التي لا تتكون من موضوع ومحمول ، بقدر ما تتكون من موضوعين مرتبطين بعلاقة . ولقد عبر رسل عن هذا المعنى بقوله : (كثيرا ما قيل إن كل قضية يمكن ردها إلى أحد أنواع القضايا الحملية ، غير أننا سنجد .. كثيرا من الأسباب لرفض هذه الوجهة من النظر . ومع ذلك يمكن القول بأن جميع القضايا غير الحملية ، والتي لا تحكم على أعداد ، يمكن ردها إلى قضايا مشتملة على حدين وعلاقة) (١) وهذا هو السبب الأساسي(٢) في أننا لم نأخذ بالتسمية التي ذهب إليها هيلبرت وأكرمان ، وغيرهما ممن عبروا عن حساب دالات القضايا باسم حساب المحمول . إذ ليست جميع القضايا هي مما يتكون من موضوع ومحمول بينهما علاقة تضمن أو اشتمال كما هو الحال في القضايا الحملية في المنطق التقليدي(٣) ، بل هناك قضايا أخرى تقوم على علاقات أخرى غير علاقة التضمن أو الاشتمال مثل العلاقات المكانية أو الزمانية وغيرها . وإلا كان علينا أن نوسع من معنى المحمول التقليدي (فنفهم من المحمولات أسماء كل من الصفات والعلاقات) (٤) وهذا ما فعله هيلبرت الذي إعتبر العلاقة المكانية نوعا من المحمول أو هي جزء منه ، فهو يذكر في كتابه « مبادىء المنطق الرياضي » المثال التالي من الهندسة فيقول : (يمكن مثلا التعبير عن العلاقة الأساسية في الهندسة المستوية : القائلة بأن « النقطة س تقع على الخط ص » باستخدام الرمز الدالي ذي المتغيرين كما يلي : « د (س ، ص) »

---

(١) رسل : أصول الرياضيات . (الجزء الأول) ، صفحة ١٦٥ .

(٢) بالاضافة إلى الأسباب الثلاثة سالفة الذكر .

(٣) إرجع إلى كتاب « أصول الرياضيات » لبرتراندرسل ، الجزء الأول ، صفحتي ١٤٨ — ١٥٤ .

(٤) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.83.

فى هذا التعبير الرمزى تكون قيم س هى النقاط فقط ، كما تكون قيم ص هى الخطوط المستقيمة فقط) (١) .

٢ — ولنفرض أننا نريد التعبير رمزيا عن القضية التالية :

(ا) « الأرض بين الشمس والقمر » .

أو القضية التالية : (ب) « محمد أعطى عليا كتابا » .

فإننا نضع بدلا من الثوابت فيهما متغيرات مثل : —

(س بين ص ، و)

أو (س أعطى ص ، و)

ثم نعبر عن الدالة فى العبارة الأولى بالرمز « د » وعن الدالة فى العبارة الثانية بالرمز « ى » فنحصل على دالتى القضية التاليتين : —

(ا) د (س ، ص ، و)

و (ب) ى (س ، ص ، و)

وتسمى كل واحدة منهما بدالة القضية ذات المتغيرات الثلاثة ، طالما أن الدالة « د » أو « ى » فى كل منهما تتعلق بمتغيرات ثلاثة . وهكذا فإننا نستطيع تكوين دالات ذات متغير واحد أو متغيرين أو ثلاثة متغيرات أو أربعة (أو أكثر من ذلك بالنسبة لعبارات أكثر تركيبا وتعقيدا مثل العبارات التى تكون المجهولات فيها متعلقة بالمكان — الزمان)(٢) .

---

(١) Hilbert, D & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 58.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 84.

أنواع المتغيرات :

يلاحظ في المثال السابق أننا قد إستخدمنا الرمزين « د » ، « ى » تعبيرا عن الدالتين « بين » ، « أعطى » . ومن ثم فإننا نكون قد استخدمنا الرمزين « د » ، « ى » كمتغيرات للدالة التي توجد في دالة القضية . وعلى ذلك يمكننا أن نصنف المتغيرات إلى نوعين على الأقل هما : ـ

١ ـ متغيرات المفردات الجزئية (أو المجهولات) Individual variables مثل س ، ص ، . . .

٢ ـ متغيرات الدالات مثل : د (.) ، ى (. ، .) . . ويسميها هيلبرت باسم متغيرات المحمول Predicate variables(١)

كما يمكننا أن نصنف المتغيرات تصنيفا آخر طبقا لمدى ارتباطها بسور القضية ، أو بمعنى آخر بعلامة السور التي تضاف إلى دالة القضية . فنسمى المتغير المرتبط بالسور باسم المتغير المقيد bound ، ونسمى المتغير الذى لا يرتبط بالسور بالمتغير الحر Free . وسوف نعود إلى تفصيل ذلك بعد أن نعرض لوظيفة السور في القضية فيما يلى . .

الأسوار : Quantifiers

عرضنا من قبل لكيفية الحصول على القضايا من دالات القضايا ، وذلك بوضع الثوابت مكان المتغيرات ، وتسمى هذه الطريقة باسم طريقة التخصيص Specialization(٢) . وهناك طريقة أخرى للحصول على القضايا من دالات القضايا ،

---

(١) Hilbert, D & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 59.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 86.

هى تسوير الدالات أو تكميمها Quantification ، وذلك بوضع السور Quantifier — ويسمى كذلك بعامل الاجراء Operator(١) الذى يحدد كمها — قبل الدالة (٢) .

والسور كما نعرف فى المنطق قد يكون كليا Universal أو قد يكون وجوديا Existential ، وهذا ما أشرنا إليه فى حساب قضايا الفئات من قبل . وسوف نستخدم هذا التصنيف نفسه فى حساب الدالات والقضايا المسورة ، وذلك كما يلى : —

أولا : السور الكلى : Universal quantifier

وينقسم بدوره — من حيث الكيف — إلى نوعين ، سور كلى موجب وسور كلى سالب .

١ — السور الكلى الموجب :

(أ) لو كانت لدينا دالة القضية : د س .

وأردنا أن نحولها إلى قضية عامة أو كلية فأننا نكتبها على النحو الآتى : —

(بالنسبة لكل س ، تكون إذن « د س ») . وهذا ما نعبر عنه رمزياً على النحو الآتى : —

(س) د س .

فإذا ما ذكرنا أى معنى محدد للدالة « د » ، كانت العبارة السابقة قضية لا دالة

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٨٧ .

(٢) يستخدم رايشنباخ فى كتابة السابق، صفحة ٨٧ بدلا من المصطلح «تسوير» مصطلح تقييد المتغيرات binding of variables وسوف نعود إلى هذا المصطلح الأخير حين نعرض لمجال الأسوار .

قضية ، على الرغم من أنها تشتمل على المتغير « س » ، وذلك لأن التعبير السابق ستكون له قيمة صدق محددة . وهكذا إذا كانت « د س » تعنى أن « س أزرق اللون » ، فإننا نحصل على قضية يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة وهى : بالنسبة لأى س ، فإن س يكون أزرق اللون »[1] .

ب — ولعل التعبير عن القضية الكلية يكون أكثر وضوحاً لو كانت دالة القضية ، مركبة من أكثر من دالة مثل : —

(س) (د س ⊃ ى س) .(٢)

وهى الصورة العامة للقضية الكلية الموجبة . وتقرأ : أنه بالنسبة لأى س ، لو كانت « د س » ، لكانت إذن « ى س » . فإذا كانت « د » تعنى « إنسان » ، وكانت « ى » تعنى « فانى » ، كانت إذن الصيغة السابقة ، هى القضية التالية : « بالنسبة لكل س ، فإن القول بأن « س » إنسان يستلزم القول بأن س فان » ، أو هى القضية التالية : —

« كل إنسان فان . »(٣)

ونحن عادة ما نكتب علامة السور (س) على يمين القضية ، كما نضع القضية بين قوسين لكى نوضح أن السور ينطبق على كل التعبير الذى يكوّن القضية(٤). وسوف

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٨٨

(٢) ويعبر عنها رايشنباخ على النحو الآتى : (س) [د (س) ⊃ ى (س)] .
المرجع السابق ، الوضع نفسه .

(٣) المرجع السابق ، الوضع نفسه .

(٤) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 346.

نسمى الرمز «(س)» بالسور الكلى، أو بعامل الإجراء الكلى all-operator(١).

السور الكلى السالب

لو كانت لدينا القضية الكلية السالبة التالية : « الشخص السعيد لا يكون مشغولا بنفسه » ، وهى تعنى « إذا كان هناك شخص سعيد ، فهو لا يكون مشغولا بنفسه » . وإذا رمزنا للعبارة « س شخص سعيد » بالرمز « د س » والعبارة « س مشغول بنفسه » بالرمز « ى س » ، استطعنا أن نرمز للعبارة « س ليس مشغولا بنفسه » بالرمز « ـ ى س » (وذلك باستخدام علامة نفى القضية « ـ » لنفى « ى س » فتصبح « ـ ى س »(٢)) . ومن ثم فإننا نحصل على الصيغة التالية ، التى تعبر عن الصورة العامة للقضية الكلية السالبة :

(س) (د س ⊃ ـ ى س)

وتقرأ : بالنسبة لأى س ، إذا كان س هو د ، فإنه يلزم عن ذلك أن لا يكون س هو ى . وقد تكتب الصيغة السابقة بشكل أبسط على النحو الآتى : ـ

---

(١) ويرجع استخدام العلامات للأسوار فى المنطق الرمزى بصفة عامة إلى بيرس الذى أدخل فى منطقه ، وقدم الرمزين π ، ≧ للتعبير عن السور الكلى « كل » ، أو السور الجزئى « بعض » ـ على الترتيب . وذلك فى كتابه للمنطق الصحيح Exact Logic ، الفقرة رقم ٢٩٣ . وهو الكتاب الثالث من مجموعة مؤلفاته : Collected Papers

(٢) ويستخدم رايشنباخ علامة نفى الحدود ، فيعبر مثلا عن نفى « ى س » بالشكل الآتى : ى (س) .

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 91

(س) ~ د س (١)

ثانياً : السور الوجودى :

ا — الموجب :

فرقنا من قبل بين القضية الكلية وبين القضية الجزئية فى أن الأولى لا تتكلم عن وجود ما صدقات بالفعل ، إنما تخبرنا أنه إذا كانت هناك أعضاء فى فئة معينة ، فإنها ستكون متصفة بكذا وكذا من الصفات الواردة فى المحمول . فإذا كانت لدينا القضية « كل ا هى ب » فإننا لا نفهم من هذه القضية وجود أعضاء فى الفئة ا بالفعل، إنما نفهم منها أنه لو كانت هناك ما صدقات فى الفئة ا فهى ستكون متصفة بالصفة ب . وهكذا فالقضية الكلية ، هى فى حقيقتها قضية شرطية ، أو هى قضية لزوم . وهذا هو السبب فى أن تعبيرنا عن القضية الكلية جاء على شكل لزوم بين الدالتين «د س»، « ى س » . أما القضية الوجودية فهى على خلاف ذلك ، إذ أنها تؤكد وجود عضو أو ما صدق واحد على الأقل من ماصدقات موضوع القضية ، وتصفه بأنه كذا وكذا . ومن ثم فهى لا تفترض إتصاف المفرد « س » بصفة ما فى حالة وجوده بالفعل ، بل تقرر وجوده بالفعل وتصفه . ومن ثم فالقضية الوجودية ليست قضية شرطية ولكى نوضح أن القضية الجزئية تقول شيئاً عن فرد واحد على الأقل ، موجود فى العالم ، فإننا نستخدم سوراً جزئياً Particular أو وجودياً Existential(٢) ، ونرمز له بالرمز : (E س) .

ويقرأ هذا السور : « يوجد على الأقل فرد واحد هو س ، بحيث يكون . . .) ، ويضاف هذا الرمز دائماً قبل كل قضية جزئية .

---

(١) ويستخدم رايشنباخ الصيغة التالية : (س) د $\overline{(س)}$ المرجع السابق ، ص٩٣

(٢) ويسمى أحياناً بعامل الإجراء الوجودى Existential operator المرجع السابق ، صفحة ٨٩

فلو كانت لدينا القضية الجزئية التالية : « بعض المقامرين فقراء » ، فإننا نعبر عنها رمزيا على النحو الآتى : —

(∃ س) (د س . ى س) .

وهى الصيغة العامة للقضية الجزئية الموجبة . وتقرأ هذه الصيغة الرمزية على النحو الآتى : —

« يوجد على الأقل فرد واحد هو س ، بحيث يكون س مقامرا (أى : د س) وفقيرا (أى : ى س) . كما يمكن أن نكتب صيغة القضية الجزئية الموجبة بشكل أكثر تبسيطا على النحو الآتى : —

(∃ س) د س .

(ب) السالب :

لو كانت لدينا القضية الجزئية السالبة التالية : —

« بعض الأغنياء ليسوا أذكياء »

ولو رمزنا للعبارة « س غنى » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س ذكى » بالرمز « ى س » لكان التعبير الرمزى عن العبارة « س ليس ذكيا » هو « ـ ى س » . ومن ثم فإننا باستخدام السور الوجودى ، نحصل على الصيغة التالية :

(∃ س) (د س . ـ ى س) (١)

وهى الصيغة العامة للقضية الجزئية السالبة . وتقرأ : « يوجد فرد واحد على الأقل هو س ، بحيث يكون س غنيا (أى : د س) ، وغير ذكى (أى : ـ ى س) .

(١) Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 348

هذا ويمكن كتابة صيغة القضية الجزئية السالبة بشكل أكثر تبسيطا على النحو الآتى : ـ

(∃ س) ـ د س . (١)

ثالثا : سور القضية المفردة : ـ

(ا) الموجب :

والقضية المفردة عادة ما تخبرنا عن جزئى مفرد واحد أو شخص معين يشار إليه باسم علم مثلا أو باسم إشارة .

١ ـ فلو كانت لدينا القضية : ـ

« هذا الشخص من القامرين وهو فقير »

أمكن التعبير عنها رمزيا على النحو الآتى : ـ

(∃ ١) (د س . ى س)

وهى الصيغة العامة للقضية المفردة الموجبة . وتقرأ : « بالنسبة لهذا المفرد س ، فان س مقامر (أى . د س) ، س فقير (أى . د س) » .

٢ ــ ولو كانت لدينا القضية . « سقراط فيلسوف » ،

فاننا نرمز للعبارة « س هو سقراط » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س فيلسوف » بالرمز « د س » ، ومن ثم فاننا نحصل على الصيغة التالية .

(∃ ١) (د س . د س) .

---

(١) ويستخدم رايشنباخ الصيغة التالية : (∃ س) د $\overline{(س)}$ ، أنظر :
Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.93

ويمكننا فى هذه الحالة أن نجعل الرمز « د س » ممثلا لما تشير إليه كل من الدالتين المعطوفتين ومن ثم يمكن التعبير عن القضية رمزيا كما يلى : —

(E ١) د س . (١)

(ب) السالب :

ويمكن الرمز للقضية المفردة السالبة على النحو الآتى : —

(E ١)(د س . ـ ى س) .

تسوير القضايا الحملية التقليدية :

هكذا يمكننا التعبير رمزيا عن القضايا الأربع التقليدية على النحو الآتى : (٢)

١ — القضية الكلية الموجبة : A : كل ع هى ح :

(س)(ع س ⊃ ح س) .

٢ — القضية الكلية السالبة : E : لا ع هى ح :

(س)(ع س ⊃ ـ ح س) .

٣ — القضية الجزئية الموجبة : I : بعض ع هى ح :

(E س)(ع س . ح س) .

٤ — القضية الجزئية السالبة : O : ليس بعض ع هى ح :

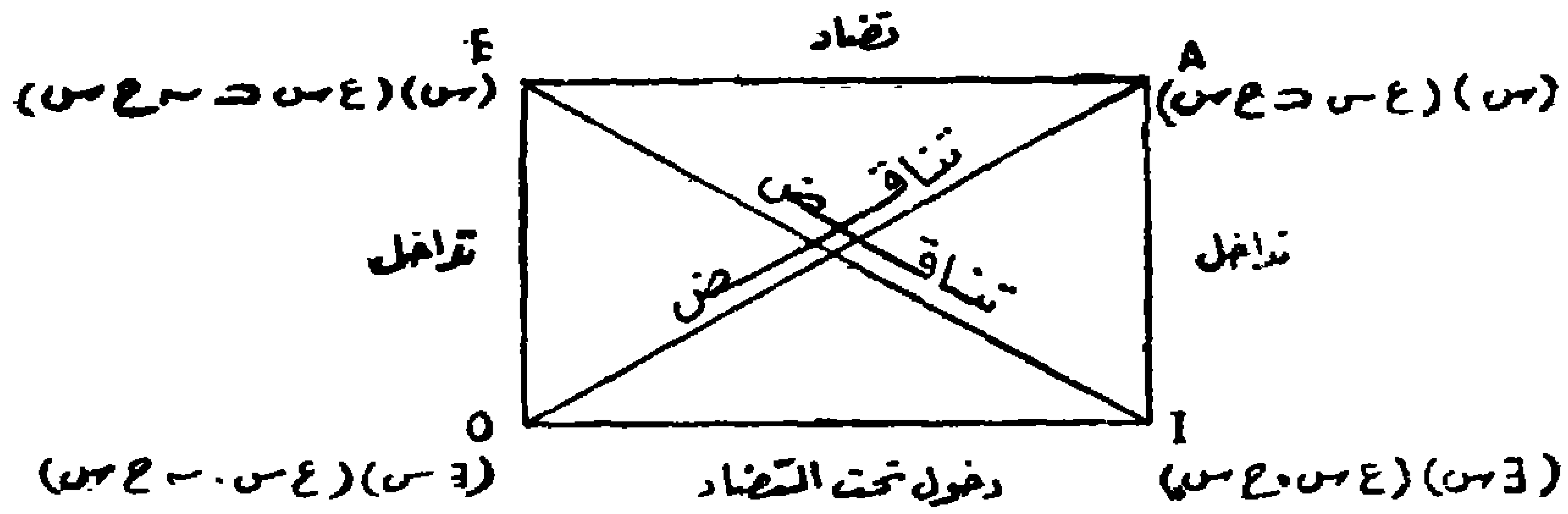
(E س)(ع س . ـ ح س) .

---

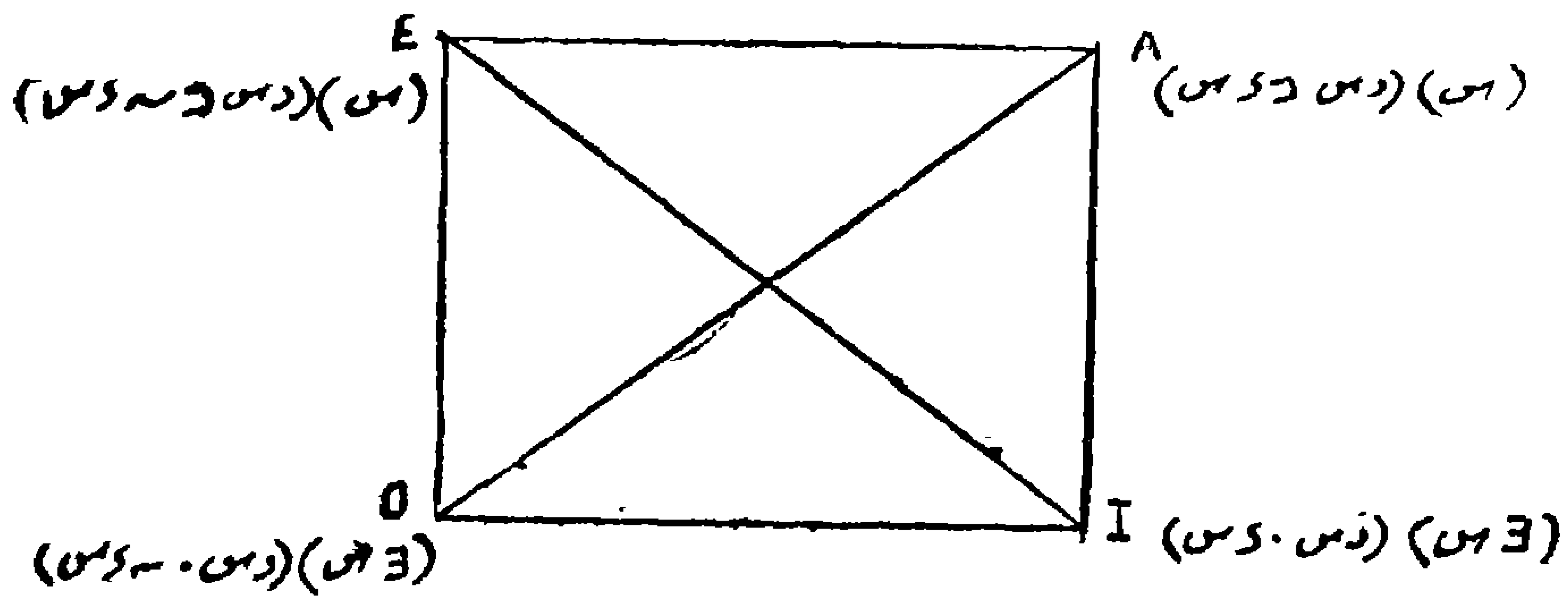
(١) Shipper, E. & Schuh, E. : A First Course in Modern Logic P. 207

(٢) سوف نستخدم هنا الرمز « ع » للدلالة على الموضوع ، والرمز « ح » للدلالة على المحمول فى القضية الحملية .

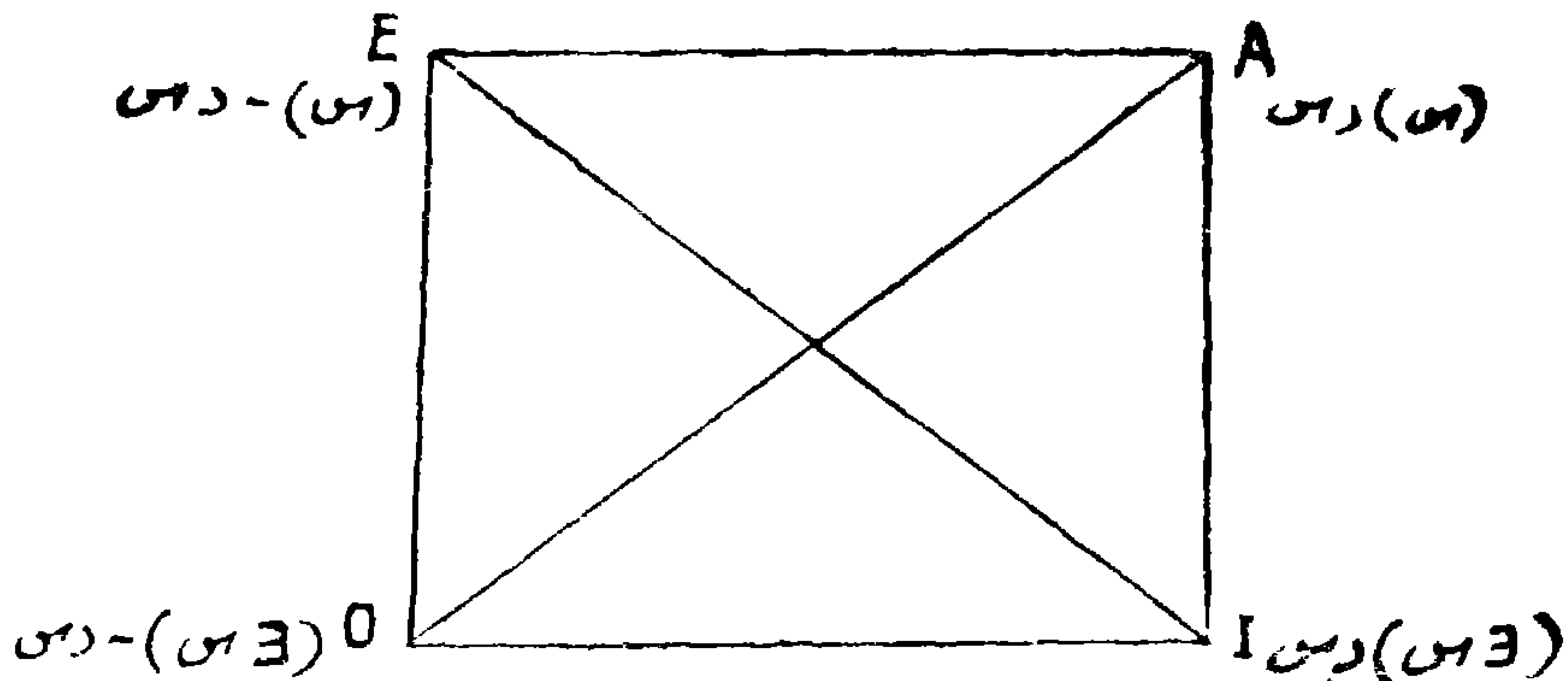
ومن ثم يمكننا أن نكتب المربع التقليدى لتقابل القضايا باستخدام الرمزين ع ، ح للدلالة على الموضوع والمحمول على النحو الآتى : —



أو أن نكتبه لو استخدمنا رموز الدالة والأسوار على النحو الآتى : —



أو نكتبه بطريقة مبسطة على النحو الآتى : — (١)



(١) ويرجع هذا الشكل إلى رايشنباخ ، مع شىء من التعديل فى الرموز =

ومما هو جدير بالملاحظة هنا أن نقض محول القضية الكلية السالبة ، يعبر عنه بنفس النحو رمزيا ، فإذا كانت (لا ع هى ح) يعبر عنها رمزيا بالصيغة : « (س) (ع س ⊃ ـ ح س) » ، فإن قضية نقيض محولها ، وهى : (كل ع هى حَ) ، يعبر عنها رمزيا بالصيغة : « (س) (ع س ⊃ ـ ح س) » .

وهذا ما ينطبق كذلك فى حالة القضية الجزئية السالبة ، لأن قضية نقيض محولها وهى (بعض ع هى حَ) ، ويرمز لها بالصيغة :

(∃ س) (ع س . ـ ح س) (١)

هى الصيغة الرمزية الخاصة بالقضية الجزئية السالبة الأصلية .

مجال الأسوار :

لو قارنا بين الصيغتين التاليتين : ـ

١ ـ (س) (د س ⊃ ی س) .

٢ ـ (س) د س ⊃ ی س .

فإننا نلاحظ أن مجال السور فى العبارة الأولى ، منصرف إلى دالة القضية كلها أى : (د س ⊃ ی س) أما مجال السور فى العبارة الثانية ، فلا ينصرف إلا إلى الدالة « د س » فقط . ومن ثم يكون اللزوم فى هذه الحالة الثانية لا بين « د س »

= التى استخدمها ، فهو يستخدم الرموز التالية : (س) د (س) للتعبير عن A ، (س) د $\overline{(س)}$ للتعبير عن E ، (∃ س) د (س) للتعبير عن I ، (∃ س) د $\overline{(س)}$ للتعبير عن O . أنظر :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 93

(١) Mourant. J.A. : Formal Logic. P. 349.

وبين « ى س » كما فى العبارة الأولى ، بل بين « (س) د س » وبين « ى س »
ويمكن توضيح هذا الفارق بين العبارتين على النحو الآتى : —

أولا : لو قرأنا الصيغتين رقم ١ ، ٢ لعبرنا عن الأولى : « بالنسبة لأى س ، إذا كانت س هى د ، لكانت س إذن هى ى » ولعبرنا عن الثانية كما يلى : إذا كان، بالنسبة لأى س ، س هى د ، كانت إذن س هى ى » .

ثانيا : كما أننا لو قارنا بين السور « (س) » وبين علامة نفى القضية « ~ » للاحظنا أننا لو أردنا نفى القضية اللزومية التالية : ن ⊃ ل ، فاننا نكتبها : « ~(ن ⊃ ل) » .

وهذا — كما عرفنا من قبل — يختلف عن القول : « ~ ن ⊃ ل » ، لأن النفى فى الحالة الأولى ينصرف إلى قضية اللزوم (ن ⊃ ل) كلها ، فى حين أن النفى فى الصيغة الثانية لا ينصرف إلى قضية اللزوم كلها ، بل إلى المقدم فيها فقط ، أى إلى « ن » وحدها .

فاذا ما طبقنا ذلك بالنسبة للسور (س) فاننا نلاحظ أن مجاله يتحدد بالنسبة لأصغر وحدة رمزية تتلوه مباشرة ، سواء كانت هذه الوحدة الرمزية وحدة مركبة مثل (د س ⊃ ى س) فى الصيغة الأولى ، أو مثل « د س » فى الصيغة الثانية .

الأسوار وتقييد المتغيرات : —

عادة ما يسمى للتغير الذى يتعلق بالسور — كليا كان السور أو وجوديا — بالمتغير المقيد Bound variable (١) (وهو الذى يقوم بدور مماثل للدور الذى

---

(١) ويسمى كذلك بالمتغير الظاهرى apparent على حد تعبير رسل فى كتابه « أصول الرياضيات » ، — الجزء الأول ، صفحة ٤٥

يلعبه المتغير الخاص بالتكامل فى الرياضيات) (١) .

وفى مقابل المتغير المقيد ، يمكننا أن نسمى المتغيرات التى لا تتقيد بالأسوار ، بالمتغيرات الحرة Free variables (٢) . ولتوضيح ذلك نأخذ الصيغ التالية : ـ

١ — (س) (د س ⊃ ى س)

نلاحظ فى هذه الصيغة أن المتغير « س » قد ورد فى دالة القضية : « د س ⊃ ى س » على أنه متغير مقيد بالسور ، أو على أنه داخل فى نطاقه . لأننا نقرأ الصيغة كلها على النحو الآتى : (بالنسبة لأى س ، إذا كانت « د س » ، كانت إذن « ى س ») . ومن ثم فالمتغير « س » مقيد فى هذه الحالة بالسور أو بعامل الاجراء الكلى (س) (٣) .

وهكذا فإننا نعرف أن متغيرا ما ، هو متغير مقيد ، إذا كان داخلا فى مجال السور الذى يستخدم هذا المتغير .

٢ — د س .

نلاحظ أن «س» الواردة فى هذه الصيغة ، غير مرتبطة أو مقيدة بسور معين ،

---

(١) Hilbert, D-& Ackermann,w : Principles of Mathematical Logic, P. 59

(٢) ويسمى المتغير الحر كذلك بالمتغير الحقيقى real عند رسل فى كتابه سالف الذكر ، صفحة ٤٥ . إرجع كذلك إلى كتاب تارسكى « مقدمة المنطق » الذى أورد أمثلة متعددة للمتغيرات بنوعيها فى مجال الرياضيات خاصة .

Tarski, A. : Introduction Lo Logic, pp. 11-12.

(٣) Reichenbach, H : Elements of Symbolic Logic, P. 88.

ولذا فهى متغير حر (١) . أما لو أدخلنا عليها السور الكلى (س) أو السور الوجودى (∃ س) ،لحصلنا على :

(أ) (س) د س .

وتقرأ : « بالنسبة لأى س ، تكون س متصفة بأنها ى » .

أو ، (ب) (∃ س) ى س .

وتقرأ : « توجد على الأقل س واحدة ، وهى متصفة بأنها د » .

ويصبح المتغير « س » فى العبارتين الأخيرتين (أ ، ب) متغيرا مقيداً، بالسور الكلى (س) فى العبارة رقم أ والسور الوجودى (∃ س) فى العبارة رقم ب .

٣ — (∃ س) (د س . ى ص)

فى هذه الصيغة نلاحظ أن المتغير « س » مقيد بالسور (∃ س) ، فى حين أن المتغير «ص» غير مقيد بهذا السور . فى مثل هذه الحالة نقول أن المتغير «ص» متغير حر ، لأنه قد ورد فى الصيغة السابقة بدون أن يكون داخلا فى مجال السور (٢) .

٤ — (س) د س ⊃ ى س .

فى هذه الصيغة نلاحظ أن المتغير الواحد « س » يرد فى صيغة واحدة مرة على أنه متغير مقيد ، وأخرى على أنه متغير حر . فالمتغير « س » فى « د س » مقيد بالسور (س) ومن ثم فهو متغير مقيد ، فى حين أن « س » الوارد فى « ى س » لايدخل فى نطاق السور (س) ، ومن ثم فهو متغير حر .

٥ — (س) (ص) (د س ⊃ ى ص)

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٢) Mourant, J. A. : Formal Logic. P. 352 .

ونلاحظ فى هذه الصيغة وغيرها من الصيغ التى تحتوى على أكثر من متغير ، أن هذه المتغيرات إما أن تكون كلها مقيدة ـ كما فى المثال السابق ـ أو أن يكون بعضها مقيداً فى حين يكون بعضها الآخر حراً مثل الصيغة التالية :

(E س) (E ص) (د س . ى ص و) (١)،

التى نلاحظ فيها أن المتغيرين س ، ص مقيدان بالأسوار ، فى حين أن المتغير « و » غير مقيد بالسور ، ومن ثم فهو متغير حر .

وعادة ما تسمى الصيغ التى تحتوى على متغير حر واحد على الأقل ، بالصيغ المفتوحة Open formulas ، كما نسمى الصيغ التى لاتتضمن أى متغير حر بالصيغ المغلقة Closed formulas .

تحويل دالات القضايا إلى قضايا :

الواقع أن القول بأن الأسوار تقيد المتغيرات ، معناه أنها تحول المتغيرات الحرة إلى متغيرات مقيدة . وبعبارة أخرى فإن دخول السور على دالة القضية ، يحول هذه الدالة ـ إذا كان ذلك كافيا لتقييد كل المتغيرات الحرة فيها ـ إلى صيغة قضية . وفيما يلى يمكننا أن نلخص الشروط التى يجب أن تتحقق فى صيغة القضية التى نحصل عليها من دالة القضيه : ـ

١ ـ أن تكون ذات سور يحدد الكم فيها .

٢ ـ أن توضع الرموز الخاصة بالقضية بعد السور داخل أقواس ،حتى لايقتصر مجال السور على بعض رموز القضية دون بعضها الآخر .

٣ ـ أن يكون السور كافيا لتقييد جميع المتغيرات ، فلا يكون فيها أى متغير حر .

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

ومن ثم يمكننا أن نقارن بين صيغة القضية وبين دالة القضية على النحو الآتى : —

إن صيغة القضية ، صيغة مغلقة ، بها كل المتغيرات مقيدة بالأسوار ، أما دالة القضية فقد تحتوى على متغيرات مقيدة أو لا تحتوى ، لكنها تحتوى أساساً على متغير واحد حر على الأقل . وعلى ذلك يكون فى استطاعتنا تحويل دالة القضية إلى صيغة القضية كما يلى : —

(أ) إما بإدخال المتغيرات داخل الأقواس . (إذا كان السور مقيدا المتغيرات) .

فدالة القضية : (س) د س ⊃ ء س ،

تصبح بهذا الأجراء صيغة القضية التالية الكلية : —

(س) (د س ⊃ ء س) .

(ب) وإما بتوسيع السور بحيث يقيد المتغيرات الحرة (لو كانت علامة القضية داخل أقواس) .

فدالة القضية : (س) (د س ⊃ ء ص)

تتحول بهذا الإجراء إلى صيغة القضية التالية :

(س) (ص) (د س ⊃ ء ص)

(ح) وإما بتوسيع السور بحيث يقيد المتغيرات الحرة ، مع إدخال التعبير الرمزى الخاص بالقضية داخل أقواس .

فدالة القضية : (س) د س ⊃ ء ص

تتحول إلى دالة القضية:

(س) (ص) د س ⊃ ء ص

وذلك بتوسيع السور لكى يقيد المتغير « ص » . ثم تتحول إلى صيغة القضية :

(س) (ص) (د س ⊃ ء ص)

وذلك بوضع رموز القضية داخل الأقواس حتى لا يكون السور مقصوراً على « د س » فقط دون « د ص » .

دالات القضايا من حيث الصدق والكذب :

عرفنا من قبل فى المنطق التقليدى ، إن القضية هى القول الذى يمكن أن يكون صادقاً أو كاذبا . وعلى ذلك فكل من القضيتين التاليتين : « كل إنسان فإن » ، « سقراط انسان » يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة (وهما صادقتان بالفعل) ، ومن ثم فالصيغتان المعبرتان عن هاتين القضيتين ، على الترتيب : — (س) (د س ⊃ ء س) ، (∃ ١) (د س . ء س) يمكن أن تكون كل منهما صادقة أو كاذبة ، طالما أنهما لا تحتويان على متغيرات حرة . ومع ذلك فإن كلا منهما لاتصبح صادقة أو كاذبة فعلا إلا إذا حددنا معنى كل حد من حدودها ، أى وضعنا فيها ثوابتا بدلا من المتغيرات .

أما دالة القضية فهى لاتكون صادقة أو كاذبه بمعنى الصدق أو الكذب الموجود فى القضية ولكننا مع ذلك يمكن أن ننظر إليها (باعتبارها داخلة فى المفهومين « صادق فى جميع الأحوال » و « صادق فى بعض الأحوال »)(١) . و « الصدق الدائم » صفة تتصف بها الدالات التى يمكن أن تتحول إلى قضايا كلية ، فى حين

(١) رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، صفحة ٢٢٩ .

أن « الصدق فى بعض الأحوال » صفة توصف بها الدالات التى يمكن أن تصبح قضايا جزئية . وفى هذا الصدد يقول رسل : (وهكذا فإن دالة القضية «إذا كان س إنسانا، كان س فانيا » صادقة دائما ، أو صادقة فى جميع الحالات . أوخذ هذه العبارة : « لا توجد عنقاء » ، فهى نفى قولنا « دالة القضية : « س ليست عنقاء » صادقة فى جميع الحالات ») (١) . من العبارة السابقة يمكننا أن نتبين أن القضية (لاتوجد عنقاء) مساوية لقولنا :

١ — بدالة القضية « س ليست عنقاء » .

٢ — وقولنا « صادقة فى جميع الحالات » .

وبما أن دالة القضية تتحول إلى صيغة قضية لو أدخلنا عليها السور ، فكأن رسل فى هذه الحالة يستخدم التعبير « صادقة دائما » بدلا من السور الذى يجب أن يضاف إلى الدالة ، لكى تتحول إلى صيغة قضية .

وبصفة عامة يمكن القول بأن رسل يستخدم العبارة « صادقة دائما » حين يريد التعبير عن سور القضية الكلية ، الذى عبرنا عنه بالرمز (س) والذى يقرأ : « بالنسبة لأى س ... » فالقول بأن الدالة صادقة دائما تعنى أنها صادقة « بالنسبة لأى س » أو « بالنسبة لأية حالة من الحالات التى تكون س » .

كما يستخدم رسل كذلك العبارة « صادقة أحيانا » حين يريد التعبير عن سور القضية الجزئية الذى عبرنا عنه بالرمز ($\exists$ س) ، والذى يقرأ : يوجد على الأقل فرد واحد هو س بحيث ... » . فالقول بأن

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٢٣٠

الدالة صادقة أحيانا ، يعنى أنها صادقة على الأقل فى حالة واحدة . وقد عبر رسل عن هذا المعنى بقوله : (عندما نقول « يوجد ناس » فهذا يعنى أن دالة القضية (س إنسان) صادقة أحيانا . أى صادقة لبعض قيم س) (١) . ولقد ترتب على ذلك أن عبر رسل فى كتابه « مقدمة للفلسفة الرياضية » عن القضايا الحملية التقليدية باستخدام الأسوار المعبرة عن الصدق ، « دائما أو أحياناً » ، على النحو الآتى : ـ

١ ـ القضية الكلية الموجبة A : « كل ل ن » تعنى « د س تستلزم ى س صادقة دائماً » .

٢ ـ القضية الجزئية الموجبة I : « بعض ل ن » تعنى « د س . ى س صادقتان أحياناً » .

٣ ـ القضية الكلية السالبة E : « لا ل ن » تعنى « د س تستلزم لا ـ ى س صادقة دائماً » .

٤ ـ القضية الجزئية السالبة O : « بعض ل ليست ن » تعنى « د س . لا ـ ى س صادقتان أحياناً » .(٢)

أهم الاجراءات والعلاقات الخاصة بالحساب التحليلى لدالات القضايا :

الواقع أن أغلب الاجراءات والعلاقات وكذا القوانين التى سبق ذكرها فيما يتعلق بالحساب التحليلى للقضايا ، تكاد تنطبق فى حالة الحساب التحليلى لدالات القضايا ، والقضايا ذات الأسوار التى نتوصل إليها باستخدام فكرة السور مع دالة

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٢٣١ .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٢٣٤ . وقد غيرنا فى بعض الرموز التى يستخدمها رسل ، بما يتفق مع سياق الرموز التى نستخدمها فى كتابنا الحالى .

القضية . لذا فإننا سنكتفي هنا باختيار بعض هذه الاجراءات ، والعلاقات لكى نبرزها فى ضوء حساب دالات القضايا ، وما ينتج عن تسويرها من صيغ للقضايا . وذلك على النحو الآتى : —

(ا) بعض الاجراءات الخاصة بحساب الدالات : —

أولا : إجراء النفى :

١ — لو كانت لدينا الدالة : « د س » .

وكانت « د » مثلا تعبر عن « إنسان » ، فإننا نقرأها : « س إنسان » . فإذا ما أردنا أن ننفيها كى نقول « س ليس إنسانا » فإننا نكتبها كما يلى : —

« ~ د س » .

٢ — أما لو كانت لدينا صيغة القضية الكلية الموجبة :

(س) (د س ⊃ ى س) ،

فإننا نستطيع أن نتناولها — فى حالة النفى — من زاويتين ١ — من حيث مكوناتها، وهما « د س » ، « ى س » . ٢ — أو من حيث هى صيغة لقضية واحدة . ومن ثم فالنفى فى هذه الحالة يمكن أن ينصرف إلى : —

(ا) إحدى مكونات صيغة القضية مثل « ~ ى س » ، فنحصل على : —

(س) (د س ⊃ ~ ى س)

(ب) كما يمكن أن ينصرف إلى القضية ككل ، ومن ثم فإننا نضع علامة النفى قبل السور على النحو الآتى : —

~ (س) (د س ⊃ ى س)

وتقرأ : (إن القول « بأنه بالنسبة لأى س ، لو كانت س هى د ، لزم عن ذلك أن تكون س هى ى » هو قول كاذب) . وبما أن القضية التى نفينا سورها هى قضية كلية موجبة ، فسنلاحظ أن نفيها ، سيكون مكافئا لاثبات القضية المتناقضة معها ، أى القضية الجزئية السالبة . وسنعود إلى هذا بالتفصيل فيما بعد .

(حـ) كما يمكن أن ينصرف إلى صيغة القضية من الزاويتين معاً ، فنطبق إجراء النفى على أحد مكونات الدالة ، وبالنسبة للسور فى وقت واحد ، فتصبح القضية الأصلية فى هذه الحالة على النحو الآتى : —

ـ (س) (د س ⊃ ـ ى س) .

وتقرأ : (إن القول بأنه : « بالنسبة لأى س ، فان د س لا تستلزم ى س » هو قول كاذب) .

ثانيا : <u>إجراء الجمع</u> (أو الفصل المنطقى) :

(ا) لو كانت « د س » تعبر مثلا عن (هو مؤلف موسيقى) ، وكانت « ى س » ترمز للعبارة (هو كاتب) ، وأردنا أن نجمع العبارتين فى عبارة واحدة مركبة ، فاننا نقول : (هو إما مؤلف موسيقى أو كاتب) . وهذا ما يعبر عنه رمزيا على النحو الآتى : —

د س ٧ ى س .

ويلاحظ فى هذه الحالة أن الصيغة السابقة تعبر عن دالة قضية ذات متغير واحد .

(ب) فاذا ما قارنا هذه الصيغة ، بدالة القضية التالية : —

د س ٧ ى ص ،

فاننا نلاحظ أن هذه الصيغة الأخيرة هى دالة قضية ذات متغيرين هما « س » ، « ص » . ومن ثم فهى يمكن أن تعبر مثلا عن قول مثل : (إما أنه مؤلف موسيقى ، أو أنها كاتبة)[1] هذا ويمكن تحويل الدالتين القضويتين إلى قضيتين تأخذان الصيغتين التاليتين : —

١ — (س) (د س ٧ ى س) .

٢ — (س) (ص) (د س ٧ ى ص) .

ثالثا : إجراء الضرب (أو العطف المنطقى) :

لو كانت « د س » ترمز لدالة القضية « س فيلسوف » ، كانت « ى س » ترمز لدالة القضية « س أديب » ، وأردنا أن نعطف الدالتين فى دالة قضية واحدة لقلنا :

« د س . ى س »

رمزا للقول « س فيلسوف وهو أديب » . ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضوية ، إلى صيغة قضية ، أضفنا إليها سورا يقيد من المتغير الوارد فيها كما يلى : —

(∃ س) (د س . ى س) .

ومما هو جدير بالذكر فى هذا الصدد أننا غالبا ما نستخدم العطف فى التعبير الرمزى عن القضية الجزئية أو الوجودية الموجبة ، كما فى المثال السابق أو السالبة كما فى الصيغة التالية : —

(∃ س) (د س . — ى س) .

---

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic. P. 84.

ب — بعض العلاقات الخاصة بحساب الدالات :

أولا : علاقة اللزوم

لو كانت « د س » ترمز للتعبير « س انسان » وكانت « ى س » ترمز للتعبير « س فإن » ، وأردنا أن نعبر عن لزوم دالة القضية « س فإن » عن دالة القضية « س انسان » ، فإننا نكتب ذلك رمزيا كما يلى : —

د س ⊃ ى س .

ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضوية إلى صيغة قضية ، فإننا نضيف إليها سوراً يقيد من للتغير الوارد فيها ، كما يلى : —

(س) (د س ⊃ ى س)

ومما هو جدير بالذكر أننا غالبا ما نستخدم اللزوم فى التعبير الرمزى عن القضايا الكلية — الموجبة ، كما فى المثال السابق ، أو السالبة ، كما يلى : —

(س) (د س ⊃ ـ ى س)

ثانيا : علاقة التنافر :

لو كانت « د س » ترمز للتعبير « س يأكل » ، وكانت « ى س » ترمز التعبير « س يتكلم » وأردنا أن نعبر عن التنافر بين هاتين الدالتين ، فإننا نكتب: —

ـ (د س . ى س)

وتقرأ : إنه من المستحيل أن يأكل س ، وأن يتكلم فى وقت واحد » .

ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضوية ، إلى صيغة قضية ، فإننا نضيف إليها السور الكلى فنحصل على صيغة التنافر التالية : —

(س) - (د س . ى س) .

ويلاحظ أننا نستطيع التعبير عن هـذه الصيغة ، بواسطة القضايا اللزومية المكافئة لها : —

١ - (س) (د س ⊃ - ى س)

٢ - أو : (س) (ى س ⊃ - د س) .

ثالثا : علاقة التقابل بين القضايا ذات الأسوار

(أ) التقابل بالتناقض :

١ - لو أخذنا الفرض العلمى الذى كان سائدا حتى القرن السادس عشر ، والقائل بأن (جميع الأجسام الثقيلة تسقط بسرعات تتناسب مع أوزانها ، وقارناه بالنتيجة التجريبية التى إنتهى إليها جاليليو وهى أن (بعض الأجسام الثقيلة لاتسقط بسرعة تتفق مع وزنها) . فاننا نلاحظ تناقض هذه النتيجة مع النظرية السابقة . فاذا مارمزنا للنظرية القديمة باستخدام « د س » بدلامن « س جسم ثقيل » ، « ى س » بدلا من « س يسقط بسرعة تتناسب مع وزنه » ، فاننا نحصل على الصيغه التالية : —

(س) (د س ⊃ ى س) .

وبالمثل يمكننا أن نعبر عن نتيجة جاليليو بالصيغة التالية : —

(∃ س) (د س . - ى س)

وبما أن القضيتين الأصليتين متناقضتان (كلية موجبة ، وجزئية سالبة) فان الصيغتين الرمزيتين المعبرتين عنهما تتناقضان كذلك . ومن ثم فان : —

(س) (د س ⊃ ى س)

تتناقض مع : (E س) (د س . ~ ى س) .

وبما أن حكم التناقض يتلخص فى أن صدق إحدى القضيتين المتناقضتين يستلزم كذب الأخرى وبالعكس ، فإننا نحصل على :—

١ — (س) (د س ⊃ ى س) : ⊃ : ~ (E س) (د س . ~ ى س) .

٢ — ~ (س) (د س ⊃ ى س) : ⊃ : (E س) (د س . ~ ى س) .

٣ — (E س) (د س . ~ ى س) : ⊃ : ~ (س) (د س ⊃ ى س) .

٤ — ~ (E س) (د س . ~ ى س) : ⊃ : (س) (د س ⊃ ى س) .

٢ — وهذا ما ينطبق كذلك فى حالة التناقض بين القضيتين الكلية السالبة والجزئية الموجبة .

وبما أن صيغة القضية الكلية السالبة تكتب : (س) (د س ⊃ ~ ى س

وبما أن صيغة القضية الجزئية الموجبة تكتب : (E س) (د س . ى س)

فإننا نحصل على :—

١ — (س) (د س ⊃ ~ ى س) : ⊃ : ~ (E س) (د س . ى س) .

٢ — ~ (س) (د س ⊃ ~ ى س) : ⊃ : (E س) (ى س . ى س) .

٣ — (E س) (د س . ى س) : ⊃ : ~ (س) (د س ⊃ ~ ى س) .

٤ — ~ (E س) (د س . ى س) : ⊃ : (س) (د س ⊃ ~ ى س) .

٣ — أما التناقض فى حالة القضية المفردة :— (E ا) د س . فيكون بينها وبين القضية التى تنفيها وهى :—

(E ا) ~ د س

وعلى ذلك فإننا نحصل على :ـ

١ ــ (∃ ا) د س : ⊃ : ~ (∃ ا) ~ د س .

٢ ــ ~ (∃ ا) د س : ⊃ : (∃ ا) ~ د س .

(ب) التقابل بالتضاد :

ويكون بين القضيتين الكليتين المختلفتين فى الكيف، أى بين الصيغتين :ـ

(س) (د س ⊃ ى س)

و (س) (د س ⊃ ~ ى س)

وبما أن حكم التضاد ، هو أن القضيتين المضادتين لا تصدقان معاً، فإننا نحصل على:ـ

١ — (س) (د س ⊃ ى س) : ⊃ : ~ (س) (د س ⊃ ~ ى س) .

٢ — (س) (د س ⊃ ~ ى س) : ⊃ : ~ (س) (د س ⊃ ى س) .

(حـ) التقابل بالدخول تحت التضاد :

ويكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين فى الكيف ، أى بين الصيغتين :ـ

(∃ س) (د س . ى س)

و (∃ س) (د س . ~ ى س)

وبما أن القضيتين الداخلتين تحت التضاد لا تكذبان معاً ، فإننا نحصل على:ـ

١ ــ ~ (∃ س) (د س . ى س) : ⊃ : (∃ س) (د س . ~ ى س) .

٢ ــ ~ (∃ س) (د س . ~ ى س) : ⊃ : (∃ س) (د س . ى س) .

(د) التقابل بالتداخل :

ويكون بين القضيتين المختلفتين كما المتفقتين كيفا ، أى بين الصيغتين:ـ

$$(\text{س})\,(\text{د س} \supset \text{ى س})$$

$$\text{و}\quad (\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \text{ى س})$$

وكذلك بين الصيغتين :—

$$(\text{س})\,(\text{د س} \supset \text{ى س})$$

$$\text{و}\quad (\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \text{ى س})$$

وبما أن حكم التداخل يتلخص فى صدق القضية الجزئية ، بناء على صدق القضية الكلية ، وكذب القضية الكلية بناء على كذب القضية الجزئية ، فإننا نحصل على :—

١ — $(\text{س})\,(\text{د س} \supset \text{ى س}) :\supset: (\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \text{ى س}) .$

٢ — $(\text{س})\,(\text{د س} \supset \sim\text{ى س}) :\supset: (\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \sim\text{ى س}) .$

٣ — $\sim(\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \text{ى س}) :\supset: \sim(\text{س})\,(\text{د س} \supset \text{ى س}) .$

٤ — $\sim(\exists\,\text{س})\,(\text{د س} \cdot \sim\text{ى س}) :\supset: \sim(\text{س})\,(\text{د س} \supset \sim\text{ى س}) .$

وهناك ملحوظة هامة يجب أن لا نغفلها فى حالة الأستدلال على الصدق فيما يتعلق بالتداخل أى فى الحالتين رقم ١ ، ٢ السابقتين . وهى أن القضية الكلية (موجبة أو سالبة) لا تدل على وجود ما صدقات بالفعل ، طالما أن السور (س) يعنى « بالنسبة لأى س » لكنه لا يعنى ما إذا كانت س موجودة بالفعل أم لا . فى حين أن السور الجزئى ($\exists$ س) يعنى « وجود فرد واحد على الأقل هو س ..» . فكيف نستنتج صدق قضية تتكلم عن أشياء موجودة بالفعل ، من صدق قضية لا تتكلم عن وجود فعلى لهذه الأشياء ؟ وقد عبر رايشنباخ عن هذا المعنى بقوله . (قد يكون من الغريب هنا أن نستنتج قضية وجودية من قضية كلية ، على الرغم من أن كلمة « كل » لا تتضمن أية دلالة على الوجود أو الإشارة

إليه ، (١) . وعلى ذلك فإننا لا نستطيع استنتاج القضيتين الوجوديتين أو الاستدلال على صدقهما ، من القضيتين الكليتين المتداخلتين معهما ، واللتين نفترض صدقهما ، ما لم نفترض أن الموضوع فى القضية الكلية يشير إلى وجود أفراد بالفعل ، أى ما لم ننص صراحة على أن :

« (∃ س) د س »

وعلى ذلك فإننا نكتب القضيتين الكليتين فى حالة الصدق فى التداخل على النحو الآتى : ـ

— القضية الكلية الموجبة : (س) [(د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] .

— القضية الكلية السالبة : (س) [(د س ⊃ ـ ى س) . (∃ س) د س] .

وعلى ذلك فإن علينا أن نضع الصيغتين التاليتين بدلا من عبارتى اللزوم رقم ١ ، ٢ السابقتين وذلك كما يلي : ـ

١ — (س) [(د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ :
(∃ س) (د س . ى س) .

٢ — (س) [(د س ⊃ ـ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ :
(∃ س) (د س . ـ ى س) .

رابعا : علاقة التكافؤ بين القضايا ذات الأسوار :

وتنشأ بين القضايا ذات الأسوار التى تكون كمية الصدق فيها واحدة : ـ

---

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.92

(ا) فمن أحكام التقابل السابقة مثلا يمكننا أن نلاحظ فى حالة التناقض أن صدق أو كذب إحدى القضيتين يستلزم كذب أو صدق الأخرى ، على الترتيب . وبما أن اللزوم المتبادل بين القضايا هو التكافؤ Equivalence كما ذكرنا ذلك فى حساب القضايا من قبل بالتفصيل ، فإننا نستطيع الحصول على الصيغ المتكافئة التالية :ـ

١ — A ≡ ~E ، أى أن :ـ

(س) (د س ⊃ ى س) ≡ ~(س) (د س ⊃ ~ى س) .

٢ — A ≡ ~O ، أى أن :ـ

(س) (د س ⊃ ى س) ≡ ~(∃ س) (د س . ~ى س) .

٣ — E ≡ ~A ، أى أن :ـ

(س) (د س ⊃ ~ى س) ≡ ~(س) (د س ⊃ ى س) .

٤ — E ≡ ~I ، أى أن :ـ

(س) (د س ⊃ ~ى س) ≡ ~(∃ س) (د س . ى س) .

٥ — I ≡ ~E ، أى أن :ـ

(∃ س) (د س . ى س) ≡ ~(س) (د س ⊃ ~ى س) .

٦ — O ≡ ~A ، أى أن :ـ

~(∃ س) (د س . ~ى س) ≡ ~(س) (د س ⊃ ى س) .

(ب) إننا نستطيع كما ذكرنا من قبل فى حساب القضايا أن نوجد تكافؤا بين عدد من دالات القضايا المختلفة ، ومن ثم بين صيغ القضايا الخاصة بها بعد التسوير . فكما أننا نكتب :

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ ق)

في حساب القضايا ، فكذلك تكون الصيغة التالية في حساب الدالات صحيحة : —

(د س ⊃ ى س) ≡ (~ ى س ⊃ ~ د س)

ومن ثم فإننا نحصل على : —

١ — (س) (د س ⊃ ى س) ≡ (س) (~ ى س ⊃ ~ د س) .

وكما أن هناك تكافؤاً بين قضيتي اللزوم والفصل التاليتين : —

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ق ∨ ل)

فكذلك تكون : —

(د س ⊃ ى س) ≡ (~ د س ∨ ى س)

ومن ثم فإننا نحصل على : —

٢ — (س) (د س ⊃ ى س) ≡ (س) (~ د س ∨ ى س) .

ولنفرض أن لدينا صيغة القضية الفصلية التالية : —

(س) (د س ∨ ~ ى س)

فإننا نستطيع التعبير عنها بأحد التعبيرين اللزوميين المتكافئين التاليين : —

ا — (س) (ى س ⊃ د س)

ب — أو : (س) (~ د س ⊃ ~ ى س)

وكما أن هناك تكافؤاً بين قضيتي اللزوم والتنافر التاليتين :

(ق ⊃ ل) ≡ ~ (ق . ~ ل) ،

فكذلك تكون : —

(د س ⊃ ى س) ≡ ~ (د س . ~ ى س) .

ومن ثم فإننا نحصل على : —

٣ — (س) (د س ⊃ ى س) ≡ (س) ~ (د س . ~ ى س)

ولنفرض أن لدينا صيغة التنافر الآتية :

(س) ~ (د س . ى س)

فإننا نستطيع التعبير عنها بأحد التعبيرين اللزوميين المكافئين التاليين : —

ا — (س) (د س . ~ ى س)

ب — أو : (س) (ى س ⊃ ~ د س)

وكما ذكرنا من قبل قائمة المتكافئات فى حساب القضايا هى : —

(ق ⊃ ل) ≡ (~ ل ⊃ ~ ق) ≡ (~ ق ∨ ل) ≡ ~ (ق . ~ ل) .

فإننا نستطيع كذلك أن نكتب قائمة للمتكافئات الخاصة بدالات القضايا ، كما يلى : —

(د س ⊃ ى س) ≡ (~ ى س ⊃ ~ د س) ≡ (~ د س ∨ ى س) ≡ ~ (د س . ~ ى س) .

ومن ثم فإننا نكتب فى حالة القضية الكلية الموجبة ، قائمة المتكافئات التالية : —

(س) (د س ⊃ ى س) ≡ (س) (~ ى س ⊃ ~ د س) ≡ (س) (~ د س ∨ ى س) ≡ ~ (∃ س) (د س . ~ ى س) .

كما نكتب فى حالة القضية الكلية السالبة قائمة المتكافئات التالية :ــ

(س) ≡ (س) (ء س ⊃ ـ د س) ≡ (س) (د س ⊃ ـ ء س)
ـ (د س v ـ ء س) ≡ (س) ـ (د س . ء س) . (١)

وكما استطعنا الإفادة من قائمة المتكافئات فى الاستدلالات المختلفة الخاصة بحساب القضايا فإننا نستطيع كذلك الإفادة من قوائم المتكافئات الخاصة بالدالات ، وصيغ القضايا التى نحصل عليها بتسوير الدالات ، فى الحساب التحليلى لدالات القضايا . وسيتضح هذا حين نعرض للاستدلالات الخاصة بدالات القضايا .

جـ ــ بعض القوانين الخاصة بدالات القضايا والقضايا المسورة :

١ ــ قوانين ترتيب الأسوار :ــ

(ا) إن الأسوار التى تكون من نفس النوع (أى المعبرة عن كم واحد ، كلى أو وجودى) يمكن عكس ترتيبها بحيث لا يؤثر هـذا فى صدق القضية . وعلى ذلك فإننا نحصل على :ــ

١ ــ (س) (ص) د (س ، ص) ≡ (ص) (س) د (س ، ص) .

٢ ــ (∃س) (∃ص) د (س ، ص) ≡ (∃ص) (∃س) د (س ، ص)(٢)

---

(١) وقد عبر رايشنباخ فى كتابه سالف الذكر « صفحة ٩٤ » عن قائمة قريبة من هذه القائمة هى :ــ

$\overline{(\text{∃ س}) \text{ د } (\text{س}) \text{ . ء } (\text{س})}$ ≡ (س) $\overline{\text{د } (\text{س})}$. $\overline{\text{ء } (\text{س})}$ ≡ (س)] د (س) $\overline{(\text{س})}$
v ء $\overline{(\text{س})}$] ≡ (س) [د (س) ⊃ ء $\overline{(\text{س})}$] .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ١٠١

ولتوضيح ذلك نقول : لو كانت س ، ص أى عددين ، وكانت « د » تعنى «أصغر من » ، لكانت « د (س ، ص » تعنى أن « س أصغر من ص » ومن ثم فاننا فى صيغة التكافؤ الأولى نقول فى الشطر الأيمن منها « بالنسبة لأى عدد هو س ، وبالنسبة لأى عدد هو ص ، يكون س أصغر من ص . وفى صيغة التكافؤ الثانية نقول : بالنسبة لأى عدد هو ص ، وبالنسبة لأى عدد هو س ، يكون س أصغر من ص . وهكذا فسواء بدأنا بالسور الكلى (س) أو السور الكلى (ص) فاننا ننتهى إلى نتيجة واحدة ، وهذا ما ينطبق كذلك على عبارة التكافؤ الثانية ، فسواء بدأنا فيها بالقول بأنه يوجد عدد واحد على الأقل هو س ، ويوجد عدد واحد على الأقل هو ص ، أو بالعكس ، فقلنا بوجود عدد واحد على الأقل هو ص ، وبوجود عدد واحد على الأقل هو س فالنتيجة واحدة فى كلتا الحالتين وهى أن « د (س،ص)» أى أن « س أصغر من ص » .

ب ـ أما لو كان السوران مختلفين كمّا ، فغالباً ما يؤدى عكس ترتيبهما إلى نتيجة مختلفة ، ومن ثم فلا يكون هناك تكافؤ بين العبارتين . ولنأخذ لذلك مثلا : إذا كانت لدينا العبارتان التاليتان :ـ

١ ـ (س) (∃ ص) [(د س ⊃ د ص) . ى (س ، ص)]

٢ ـ (∃ ص) (س) [(د س ⊃ د ص) . ى (س ، ص)] (١)

وفرضنا أن « د س » تعنى أن « س عدد طبيعى » ، كانت العبارة الأولى صادقة لأنها تعنى : « بالنسبة لأى عدد طبيعى ، يوجد عدد طبيعى أكبر منه » ، ومع ذلك

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٠٠

فان العبارة الثانية لا تـكون صادقة ، طالما أنها قد تعنى وجود عدد طبيعى واحد هو أكبر من جميــع الأعداد . وإن كنا نستطيع الحصول على تفسير صحيح صادق للعبارة الثانية لو وضعنا ـ بدلا من « د (س ، ص) » التعبير «س ليس أصغر من ص » . ومن ثم تعنى العبارة وجود عدد هو ص ، بحيث تكون جميع الأعداد ليست أصغر من ص . أو بعبارة أخرى ، يوجد عــدد واحد هو ص ، بحيث تـكون ص أصغر من كل الأعداد الأخرى . ومثل هذا العدد موجود فعلا ، فهو الصفر .

من مثل هذه الاعتبارات السابقة ، فاننا نتوصل إلى القواعد التالية لترتيب عوامل الإجراء أو الأسوار وتنظيمها . ويمـكن التعبير عن هذه القواعد بالصيـغ التالية .ـــ

١ ـ (س) (ص) د (س ، ص) ≡ (ص) (س) د (س ، ص) .

٢ ـ (∃س) (∃ص) د (س ، ص) ≡ (∃ص) (∃س) د (س ، ص) .

٣ ـ (∃ص) (س) د (س ، ص) : ⊃ : (س) (∃ص) د (س ، ص) (١)

٢ ـ قانون التطبيق . Law of Application

ويعبر عن مبدأ التداخل ، ويتلخص فى القول بأن ما يصدق بصفة عامة بالنسبة لـكل س من حيث اتفاقة مع شروط معينة ، يصدق أيضاً بالنسبة لفرد ما على الأقل هو س ، يكون مستوفياً لهذه الشروط نفسها . ويمـكن صياغة هذا القانون صياغة رمزية كما يلى .ـــ

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃س) د س] : ⊃ : (∃س) ى س .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٠١

٣ ـ قانون إختصار الأسوار .

لو كانت لدينا عبارة رمزية تحتوى على أكثر من سور (من نوع واحد ، كلى أو وجودى) أمكننا إختصار الأسوار ، بحيث نكتب السور مرة واحدة للعبارة كلها ، طالما كانت المتغيرات الواردة فى العبارة ، كلها مقيدة بنفس السور . وهذا ما يتضح مثلا من الصيغة التالية :ـ

(س) د س ٧ (س) ى س

التى يمكن كتابتها على النحو الآتى :ـ

(س) (د س ٧ ى س) (١)

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٧

الاستدلال الخاص بدالات القضايا والقضايا ذات الأسوار

يلاحظ من قانون التطبيق السابق ذكره ، أنه قائم على أساس اللزوم ، ومن ثم فهو يعبر عن إستدلال صحيح . كما يلاحظ كذلك من جميع الصيغ المتكافئة ، أنها تعبر عن استدلال صحيح ، طالما أن كل تكافؤ يعبر عن لزوم متبادل . وسنعرض فيما يلى لبعض أنواع الاستدلالات الخاصة بدالات القضايا والقضايا ذات الأسوار . مع ملاحظة أننا سوف نعتمد فى هذه الاستدلالات على نفس القوانين والقواعد التى سبق اتباعها فى الاستدلالات الخاصة بالقضايا ، فضلا عن بعض القوانين الخاصة بهذا المجال ، وسنعود إلى ذكرها فى نهاية هذا الفصل :—

أولا . استدلالات قائمة على اللزوم .

ا — استدلالات صحيحة .

لو كانت لدينا الصيغة التالية :—

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) ~ ى س] : ⊃ : (∃ س) ~ د س.

لعرفنا أنها صيغة تعبر عن استدلال صحيح ، وذلك على أساس أنها تعتمد على قاعدة أشبه بقاعدة النفى أو الرفع modus tollens بين القضايا . ويمكن توضيح هذا الاستدلال لو وضعنا بدلا من دالة القضية : (د س ⊃ ى س) ، دالة قضية اللزوم العكسى لها ، أى : (~ ى س ⊃ ~ د س) ، فتصبح صيغة الاستدلال على النحو الآتى :—

[(س) (~ ى س ⊃ ~ د س) . (∃ س) ~ ى س] : ⊃ : (∃ س) ~ د س.

والواقع أن مثل هذه الصيغ الاستدلالية ، وكذا تطبيقاتها الموسعة على النحو الذى سنذكره فيما بعد — هى صيغ أساسية لتطبيق ما هو كلى وعام بالنسبة لما هو جزئى أو خاص . أى أنها صيغ قائمة على ما أسميناه من قبل بمبدأ التطبيق ، وهو المبدأ الأساسى فى هذا الصدد .

ب — استدلالات غير صحيحة :

١ — لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا بحث الإنسان جيداً ، وجد المكان المطلوب . وبما أن شخصاً قد وجده ، إذن فهو قد بحث جيداً) ، وأردنا أن نعرف ما إذا كان صحيحاً أم لا . فإننا نرمز للعبارة « س شخص يبحث جيداً » بالرمز « هـ س » ، وللعبارة « س شخص وجد المكان المطلوب بالرمز « و س » ، ومن ثم نحصل على : —

[(س) (هـ س ⊃ و س) . (∃ س) و س] : ⊃ : (∃ س) هـ س .

فإذا ما وضعنا الرموز العامة للدالات بدلا من الرموز السابقة ، واستخدمنا « د س » بدلا من « هـ س » ، وكذا « ى س » بدلا من « و س » لحصلنا على :—

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) ى س] : ⊃ : (∃ س) ى س .

وهذا استدلال غير صحيح لأنه ليس تطبيقاً للكلى بالنسبة لحالة خاصة ، إذ أن وجود « س » الذى تصدق بالنسبة له « ى س » — ليس على سبيل اليقين — حالة خاصة من حالات « س » التى تصدق بالنسبة لها « د س » (ومن ثم « ى س ») .

هذا ويمكننا ملاحظة التشابه بين هذه الصيغة ، والصيغة الخاطئة التى ذكرنا من قبل — فى حساب القضايا — إنها قائمة على إثبات التالى .

٢ — لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا كان الإنسان فى مكان مختلف عن مكان وقوع الجريمة ، فهو لن يكون مذنباً . وهذا الإنسان كان فى مكان الجريمة ،

وعلى ذلك فلا بد وأن يكون مذنباً) ، وأردنا معرفة صحته فإننا نقوم باستخدام الرموز على النحو الآتى : —

أن نرمز للعبارة « س إنسان فى مكان يختلف عن مكان وقوع الجريمة » بالرمز « د س » ، والعبارة « ليس مذنباً » بالرمز « ى س » فإننا نحصل على : —

[(س)(د س ⊃ ى س) (∃ ١)ـ د س) : ⊃ : (∃ ١)ـ ى س .

وهو استدلال غير قائم على أساس قانون التطبيق ، لأن « س » للوجود بالفعل ، والذى تصدق بالنسبة له « ـ د س » ، هو — يقيناً — ليس حالة خاصة من حالات « س » التى تصدق بالنسبة لها « د س » (ومن ثم « ى س ») . وعلى ذلك فالاستدلال غير صحيح .

هذا ويمكننا أن نتبين أن هذه الصيغة شبيهة بالاستدلالات غير الصحيحة فى حساب القضايا القائمة على نفى المقدم . وعلى ذلك فإننا نتنهى إلى القول بأن أى استدلال يأخذ هذه الصورة يكون إستدلالا غير صحيح .

٣ — هذا وتوجد فى الاستدلالات الخاصة بالقضايا ذات الأسوار — أغلوطة تسمى عادة بأ غلوطة التسوير الخاطىء(١) ، وتتلخص فى عدم تطبيق ما هو عام بالنسبة لما هو خاص ، بل تقوم على تطبيق ما هو خاص بالنسبة لما هو خاص أيضاً . ومن ثم فهى لا تعتمد على مبدأ التطبيق بالمعنى الصحيح سالف الذكر . ولتوضيح ذلك نذكر أننا أحياناً ما نتسرع ونخطىء حين نفترض أن ما ينطبق على فرد معين ، ينطبق كذلك على فرد آخر . فنحن نفترض مثلا أنه طالما ينجح محمد حين يستذكر دروسه ، فإن علياً سوف ينجح كذلك إذا استذكر دروسه . ونعبر عن ذلك بالصيغة الرمزية التالية : —

---

(١) Fallacy of improper quanti fication

[(∃ ١) (دس ⊃ ىس) . (∃ ٢) (د س)] : ⊃ : (∃ ٢) ى س .

فمثل هذا الاستدلال ، استدلال غير صحيح ، طالما أن المقدمة الأولى اللزومية ليست مسورة تسويراً كلياً . وهذا ماينطبق كذلك بالنسبة للاستدلالات غير الصحيحة التي تكون فيها المقدمة الأولى اللزومية مسورة تسويراً جزئياً وجودياً مثل :ـ

١ ـ [(∃ س) (د س ⊃ ى س) (∃ ١) دس] : ⊃ : (∃ ١) ى س.

٢ ـ [(∃ س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ : (∃ س) ى س.

وتلخيصاً لما سبق ننتهي إلى أن لدينا على الأقل صيغتين من الصيغ الشائعة للاستدلالات الصحيحة ، وهما :ـ

١ ـ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ : (∃ س) ى س.

٢ ـ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) ـ ى س] : ⊃ : (∃ س) ـ د س.

وإن لدينا على الأقل ثلاث صور شائعة لاستدلالات غير صحيحة ، هي :ـ

١ ـ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) ى س] : ⊃ : (∃ س) د س .

٢ ـ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) ـ د س] : ⊃ : (∃ س) ـ ى س .

٣ ـ [(∃ س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ : (∃ س) ى س .

ثانياً : استدلالات لزومية موسعة تتضمن قضايا وجودية :

أ ـ استدلالات صحيحة .

١ ـ لو كانت لدينا الصيغة الاستدلالية التالية :ـ

[(س) (دس ⊃ ى س) . (∃ س) (هـ س . دس)] : ⊃ : (∃ س) (هـ س . ى س)

فستتبين أنها تعبر عن إستدلال صحيح إذ هى فى حقيقتها مجرد توسيع للاستدلال الصحيح السابق ذكره :

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) د س] : ⊃ : (∃ س) ى س . .

وهكذا فنحن لم نضف إلى الصيغة السابقة إلا القول بأن «س» للوجودة ، والتى تصدق بالنسبة لها «د س» ، ومن ثم « ى س» ، يمكن تعريفها أو تحديدها كذلك بدالة ثالثة هى « ﻫ س » .

الآن يلاحظ أن القضية الكلية « (س) (د س ⊃ ى س) » يجب أن تنطبق على كل مثال أو حالة موجودة ، تكون بالنسبة لها « د س » صادقة ، بغض النظر عن عدد الدالات الإضافية التى تتعلق بها . وبما أن هذا التطبيق صحيح بالنسبة لـ « س » المحددة بواسطة دالة واحدة ، فيجب أن يكون صحيحاً كذلك بالنسبة إلى « س » التى تتحدد بدالتين أو أكثر فى عبارة عطفية واحدة مثل (ﻫ س . د س) . وتكون صيغتها مماثلة أو مشابهة لتلك الصيغة المتطورة للقضايا ، والتى سبق ذكرها : —

[(ن ⊃ ل) م . ن] : ⊃ : م . ل .

هذا ويلاحظ أننا نستطيع كتابة الدالة الإضافية المتعلقة بالحالة الخاصة — التى رمزنا لها هنا بالرمز « ﻫ س » — إما قبل أو بعد الدالة الأولى « د س » . أما فيما يتعلق بقانون التبادل ، فإننا نلاحظ أن ترتيب الدالات فى قضية العطف لا يؤدى إلى أى إختلاف . أى أن للعنى واحد سواء كتبنا (ﻫ س . د س) أو (د س . ﻫ س) فى المقدمة ، أو كتبنا (ﻫ س . ى س) أو (ى س . ﻫ س) فى النتيجة .

٢ — ولو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا كانت أية قضية هى إما صادقة أو كاذبة . وإذا كان هذا السؤال مما لا يمكن أن يكون صادقا أو كاذبا . فهو إذن ليس بالقضية) ، وأردنا أن نتبين ما إذا كان الاستدلال صحيحا أم لا ، فإننا نرمز للعبارة « س قضية » بالرمز « د س » ، والعبارة « س يمكن أن تصدق أو تكذب » بالرمز « ى س » ، والعبارة « س سؤال » بالرمز « ﻫ س » ، فإننا نحصل على :ـ

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ ١) (ﻫ س . ى س)] :⊃: (∃ ١) (ﻫ س . ~ د س) .

وهى صيغة معبرة عن استدلال صحيح ويتضح ذلك بصفه خاصة حين نضع بدلا من :

(د س ⊃ ى س) دالة قضية اللزوم العكس لها وهى : (~ ى س ⊃ ~ د س) ، وذلك كما يلى :

[(س) (~ ى س ⊃ ~ د س) . (∃ ١) (ﻫ س . ~ ى س)] :⊃: (∃ ١) (ﻫ س . ~ د س) .

(ب) استدلالات صحيحة :

إن ما سبق ذكره عن الاستدلالات غير الصحيحة آنفا ، يصدق كذلك عنها هنا ، فالاستدلالات الصحيحة :

١ — لا تقوم على إثبات التالى .

٢ — ولا تقوم على نفى المقدم .

٣ — ويجب أن تكون المقدمة اللزومية فيها كلية حتى تنطبق على الحالة الخاصة أو الجزئية فى المقدمة الأخرى .

وعلى ذلك فكل استدلال لا تتوفر فيه شروط الاستدلال الصحيح ، يكون استدلالا غير صحيح . إلا أن هناك أغلوطة أخرى تتعلق بالصيغ الاستدلالية الموسعة ، قد تنشأ فى حالة وجود أو إدخال دالة مسورة إضافية . ولتوضيح ذلك نذكر أنه يجب فى الاستدلال الصحيح أن تكون الحالة الخاصة التى ينطبق عليها المقدم ، هى نفسها الحالة الخاصة التى توضح انطباق التالى عليها أيضا . وهذا يعنى أن الدالة الاضافية — والتى نرمز لها عادة بالرمز « هـ س » — يجب أن تكون هى نفسها فى المقدمة وفى النتيجة ، وإلا كان الاستدلال غير صحيح .

ولنفرض فى هذا الصدد أن لدينا الصيغة التالية : —

[(س) (د س ⊃ ~ ى س) . (∃ س) (د س . ~ هـ س)] : ⊃ :
(∃ س) (~ ى س . هـ س)

فى هذا الاستدلال ، نجد أن الدالة الثالثة « ~ هـ س » ، قد وردت على أنها « هـ س » فى النتيجة ، وعلى ذلك فإن اللزوم ، ومن ثم الاستدلال ، يكون غير صحيح .

ثالثا : استدلالات خاصة بتسلسلات اللزوم :

وهى عادة ما تكون استدلالات مركبة من قضايا كلية ، مثل الاستدلالات التالية : —

(ا) استدلالات صحيحة :

١ — لنفرض أن لدينا الصيغة التالية : —

[(س) (د س ⊃ ى س) . (س) (ى س ⊃ هـ س)] : ⊃ :
(س) (د س ⊃ هـ س) .

الآن يمكننا تطبيق مبدأ إختصار الأسوار ، فنكتب السور مرة واحدة فقط ، وذلك بوضعه قبل العبارة كلها ، ما دام هو السور الذى يقيد جميع المتغيرات فى العبارة اللزومية كلها وذلك كما يلى : —

(س) {[(د س ⊃ ى س) . (ى س ⊃ ه س)] ⊃ (د س ⊃ ه س)}

وهى صيغة تعبر عن استدلال صحيح . وهذا ما يمكن إظهاره من إتفاق هذه الصيغة مع المتسلسلة اللزومية (السابق ذكرها فى حساب القضايا) . فهذه الصيغة ، مثل متسلسلة اللزوم) تخضع لثلاث قواعد هى : —

١ — أن يكون المقدم فى المقدمة الأولى « د س » ، هو المقدم فى النتيجة .

٢ — أن يكون تالى المقدمة الأخيرة « ه س » ، هو التالى فى النتيجة .

٣ — أن يكون التالى فى المقدمة الأولى ، هو نفسه المقدم ، فى المقدمة الثانية .

هذا ويمكن إضافة قاعدة رابعة هنا فى حالة القضايا المسورة ، وهى : —

٤ — أن تكون جميع القضايا مسورة تسويرا كليا .

وعلى ذلك فكل استدلال يستوفى هذه القواعد الأربع كلها ، هو إستدلال صحيح .

٢ — قد لا تأتى عبارة الاستدلال مرتبة على النحو الوارد فى العبارة رقم ١ (أى السابقة) . ولذا فإننا عادة ما نعيد ترتيب الحدود أو الدالات أو القضايا المسورة ، لكى نوضح صيغة المتسلسلة الصحيحة .

ولنأخذ لذلك مثلا الحجة التى قال بها سقراط من قبل : (إن الإنسان الذى يتصرف بإرادته لا يختار الأقل خيرا بدلا من الأكثر خيرا . وفاعل الشر يختار الأقل خيرا . ومن ثم فإن فاعل الشر لا يصدر فى فعله عن إرادة حرة)(١) .

(١) Schipper, E. & Schuh, E.: A Fiest Course in Modern Logic, p. 230.

فاذا أردنا أن نتبين ما إذا كان هذا الاستدلال صحيحا ، فاننا نرمز للعبارة « س إنسان يتصرف بإرادته » بالرمز « د س » وللعبارة « س يختار الأفل خيرا » بالرمز « ى س » ، وللعبارة « س فاعل الشر » بالرمز « هـ س » فاننا نحصل على . —

(س) [[(د س ⊃ـ ى س) . (هـ س ⊃ ى س)] :⊃: (هـ س ⊃ـ د س)]

فهل مثل هذه الصيغة تعبر عن إستدلال صحيح ؟

يمكننا أن نتبين أنه استدلال صحيح لو إتخذنا الخطوات التالية . —

١ — أن نضع بدلا من المقدمة اللزومية الأولى : (د س ⊃ـ ى س) ، عبارة اللزوم العكس الخاصة بها وهى : (ى س ⊃ـ د س) .

٢ — ثم نقوم بتغيير وضع المقدمتين ، فنضع دالة القضية التى حصلنا عليها ، (ى س ⊃ـ د س) بدلا من المقدمة الثانية ، وبالعكس ، فنحصل على : —

(س) [[(هـ س ⊃ ى س) . (ى س ⊃ـ د س)] :⊃: (هـ س ⊃ـ د س)]

وهى صيغة تعبر عن متسلسلة لزوم صحيحة ، ومن ثم فإن الاستدلال صحيح .

ب — استدلالات غير صحيحة :

أما بالنسبة لأى استدلال مكون من قضايا كلية من هذا النوع ، ويكون من المتعذر علينا أن نوضح أنه قد أقيم على صيغة متسلسلة اللزوم ، فإنه يكون استدلالا غير صحيح .

ولنأخذ لذلك المثال التالى : (بما أن كل العلماء يفترضون فروضاً فلسفية ، وبما أن المحامى ليس عالماً ، فإن المحامى إذن لا يفترض فروضاً فلسفية) . فلكى نتثبت

عما إذا كان هذا الاستدلال صحيحاً أم لا ، فإننا نرمز للعبارة « س عالم » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س يفترض فروضاً فلسفية » بالرمز « ى س » ، وللعبارة « س محامى » بالرمز « هـ س » ، ومن ثم فإننا نحصل على :ـ

(س) « [(د س ⊃ ى س) • (هـ س ⊃ ـ د س) : ⊃ : (هـ س ⊃ ـ ى س)]»

فهل هذا استدلال صحيح أم لا ؟

إنه استدلال غير صحيح ، لأنه مهما كان تناولنا لهذه الصيغة ، فلن نستطيع أن نحصل منها على متسلسلة لزوم تستوفى جميع القواعد سالفة الذكر .

رابعاً : استدلالات قائمة على اللزوم العكسى :

الواقع أن الاستدلالات التى تحتوى على قضايا ذات أسوار ـ شأنها تماماً شأن تلك الاستدلالات التى تحتوى على قضايا غير مسورة ـ يمكن إقامتها بطريقة صحيحة على أساس العلاقات الأخرى التى تنشأ أو توجد بين القضايا ، مثل اللزوم العكسى ، والتنافر ، والفصل ، وغير ذلك مما سبق ذكره فى قائمة المتكافآت .

١ ـ ولنأخذ فى حالة «اللزوم العكسى» ، المثال التالى من فسلفة كانط الخلقية ،

يرى كانط : (أن الفعل إذا لم يكن قائماً على أساس القانون الأخلاقي ، فلن تكون له قيمة خلقية . وهذا الرجل يرفض السرقة خوفاً من الوقوع فى قبضة القانون. ومن ثم فإن رفض السرقة لن يحمل قيمة خلقية) .

فإذا رمزنا للعبارة «س فعل تم على أساس القانون الأخلاقى» بالرمز « ى س » وللعبارة « س يحمل قيمة أخلاقية » بالرمز « د س » وللعبارة « س إنسان يرفض السرقة » بالرمز « هـ س » ، فإننا نحصل على :ـ

[(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ ١) (هـ س . ى س)] : ⊃ : (∃ ١) (هـ س . د س) .

فإذا وضعنا بدلا من المقدمة الأولى : (د س ⊃ ى س) ، دالة قضية اللزوم العكسى لها ، لحصلنا على : (ـ ى س ⊃ـ د س) ، ومن ثم تكون الصيغة الكاملة هى :—

[(س) (ـ ى س ⊃ـ د س) . (∃ ١) (هـ س . ـ ى س)] : ⊃ : (∃ ١) (هـ س . ـ د س) وهى صيغة تعبر عن استدلال صحيح ، لأنها تعبر عن قاعدة الرفع أو النفى وقد تم تطبيقها بالنسبة لمثال أو حالة خاصة .

٢ — ولنأخذ لذلك مثلا آخر ، فلو كان لدينا الاستدلال التالى : ـ

(حيث أن الفروض القابلة للتحقيق فقط ، فروض علمية ، وبما أن الفرض الذى لا يمكن إختباره بالملاحظة لا يكون قابلا للتحقيق ، فإن الفروض التى يمكن إختبارها بالملاحظة فقط فروض علمية) ، فإننا لكى نتبين صحته ، سنرمز للعبارة « س فرض قابل للتحقيق » بالرمز « ى س » ، وللعبارة « س فرض علمى » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س يمكن إختباره بالملاحظة » بالرمز « هـ س » ، ومن ثم فإننا نحصل على : ـ

(س) [(د س ⊃ ى س) . (ـ هـ س ⊃ـ ى س)] : ⊃ : (س) (د س ⊃ هـ س) .

فإذا ما وضعنا بدلا من المقدمة الثانية : (ـ هـ س ⊃ـ ى س) دالة قضية اللزوم العكس لها : (ى س ⊃ هـ س) فإننا نحصل على الصيغة التالية (بعد اختصار لأسوار) :—

(س) [(د س ⊃ ى س) . (ى س ⊃ هـ س)] : ⊃ : (د س ⊃ هـ س)]

وهى صيغة صحيحة للمتسلسلة اللزومية ، ومن ثم فالاستدلال الذى تعبر عنه إستدلال صحيح .

خامساً : استدلالات قائمة على الفصل :

إن كثيراً من الاستدلالات الفصلية ، تطبق الفصل بالنسبة لحالة خاصة ، ولنأخذ لذلك المثال الآتى :

(كل طالب إما أن يستذكر دروسه ، وإما ألا ينجح ، وهذا الطالب لا يستذكر دروسه ومن ثم فهو لن ينجح) .

ولنرمز للعبارة « س يستذكر دروسه » بالرمز «د س» ، وللعبارة «س ينجح» بالرمز « ى س » . ومن ثم فإننا نحصل على :—

[(س) (د س ∨ ~ ى س) . (∃ ١) ~ د س] : ⊃ : (∃ ١) ~ ى س .

هذا ويمكن البرهنة على صحة هذا الاستدلال بطريقتين :

١ — إذا ما أردنا الاحتفاظ بعلاقة اللزوم ، يمكننا أن نضع بدلا من المقدمة الفصلية ، صيغة القضية اللزومية المكافئة لها وهى :—

(س) (~ د س ⊃ ~ ى س) ،

ومن ثم نحصل على الصيغة :

[(س) (~ د س ⊃ ~ ى س) . (∃ ١) ~ د س] : ⊃ : (∃ ١) ~ ى س .

وهى صيغة تعبر عن استدلال صحيح — له صورة «قاعدة الإثبات» أو الوضع — يطبق ما هو كلى على حالة خاصة .

٢ — أما الطريقة الثانية ، فهى أننا نستطيع القول بأن القضية الكلية الفصلية ، تنطبق بالنسبة لأية حالة أو مثال موجود خاص بأى من قضاياها المفصولة disj uncts ومن ثم فإن نفس الصيغ الصحيحة التى تصلح بالنسبة للاستدلالات الفصلية بين القضايا ، سوف تصلح كذلك فى تطبيق الفصل بالنسبة لأى مثال جزئى أو حالة خاصة. ولذا يمكننا القول ، بطريقة مباشرة إن الصيغة السابقة تعبر عن استدلال صحيح .

سادساً : استدلالات قائمة على التنافر :

لو كانت لدينا الصيغة التالية :ـ

[(س) ~ (د س . ى س) . (E ١) (هـ س . د س)] : ⊃ : (E ١)
(هـ س . ~ ى س) .

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت تعبر عن استدلال صحيح أم لا ، فإننا نضع بدلاً من دالة قضية التنافر « ~ (د س . ى س) » ، دالة قضية اللزوم المكافئة لها :

(د س ⊃ ~ ى س) ، فنحصل على الصيغة التالية : ـ

[(س) (د س ⊃ ~ ى س) . (E ١) (هـ س . د س)] : ⊃ : (E ١)
(هـ س . ~ ى س) .

وهى صيغة تعبر عن استدلال صحيح ، طالما أنها تعبر عن « قاعدة الإثبات » ، وقد طبقت بالنسبة لحالة خاصة هى : (E ١) هـ س .

قوانين أخرى تتعلق بالاستدلال الخاص بالقضايا المسورة

مما سبق يمكننا أن نضيف إلى القوانين الخاصة بدالات القضايا والقضايا المسورة السابق الاشارة اليها — القوانين التالية : —

١ — جميع القوانين والاستدلالات الخاصة بمنطق القضايا .

٢ — قوانين التناقض .

(ا) ~ (س) (د س ⊃ ى س) ≡ (∃ س) (د س . ~ ى س) .

(ب) ~ (∃ س) (د س . ى س) ≡ (س) (د س ⊃ ~ ى س) .

(حـ) ~ (∃ ١) د س ≡ (∃ ١) ~ د س .

٣ — قوانين التمثيل الخاصة بالاستدلال :

(ا) ~ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ س) (هـ س . د س)] : ⊃ : (∃ س) (هـ س . ى س) .

(ب) ~ [(س) (د س ⊃ ى س) . (∃ ١) (هـ س . د س)] : ⊃ : (∃ ١) (هـ س . ى س) .

(حـ) ~ [(س) (د س ∨ ى س) . (∃ ١) ~ د س] : ⊃ : (∃ ١) ى س .

(ى) ~ [(س) ~ (د س . ى س) . (∃ ١) د س] : ⊃ : (∃ ١) ~ ى س .

٤ — قانون متسلسلة اللزوم .

(س) [(د س ⊃ ى س) . (ى س ⊃ هـ س)] : ⊃ : (د س ⊃ هـ س)]

الفصل الخامس

الحساب التحليلى للعلاقات

Calculus of Relations

تعتبر النظرية العامة للعلاقات وكذا القوانين العامة المتعلقة بها من أهم أجزاء المنطق الحديث ، حتى لقد كان تشارلز بيرس — عالم المنطق الأمريكى المعاصر — يرى أن كل ما هو منطقى إنما يرتد إلى العلاقات (١) ولقد كان دى مورجن وبيرس(٢) أول من طور نظرية العلاقات فى المنطق الحديث ، ثم قام إرنست شرويدر(٣) بتوسيع العمل الذى بدأه دى مورجن واستكماله ، ثم قام كل من رسل وهوايتهد فى كتابهما « المبادىء الرياضية » بتطبيق حساب العلاقات بالنسبة لمجال الرياضيات ، وهذا ما قام به كذلك رسل فى كتابية «أصول الرياضيات» ، و «مقدمة الفلسفة الرياضية » ، وكذا الفرد تارسكى فى كتابه « مقدمة للمنطق » ، وغيرهم من المناطقة المعاصرين .

حقاً إن فكرة العلاقة ليست بالفكرة الجديدة ، فقد عرفناها فى المنطق التقليدى باسم الرابطة Copula التى تربط بين الموضوع والمحمول فى القضية الحملية . كما

---

(١) Feibleman .J .K : An Introduction to Peirce's philosophy.p.105

(٢) إرجع فى هذا إلى دراسة للمؤلف عن كتاب « المنطق الصحيح » Exact Logic لتشارلز بيرس ، فى مجلة تراث الانسانية ، المجلد ٧ ، العدد ٣ .

(٣) E. Schroder (١٨٤١ — ١٩٠٢) عالم المنطق الألمانى الذى لا يزال كتابه « جبر ومنطق العلاقات » Algebra und Logik der Relative 1885 — الذى يمثل الجزء الثالث من كتابه الكبير « محاضرات فى جبر المنطق » uber die Algebra der Logik من أهم الكتب التى بحثت الحساب التحليلى للعلاقات .

عرفناها من ثنايا الفصول السابقة حين تكلمنا عن أنواع العلاقات التي يمكن أن تقوم أو تربط بين الفئات أو بين القضايا ، أو القضايا ذات الأسوار . وزادت معرفتنا بها حين تكلمنا عن الاستدلال الذى كنا نستخدم فيه أساساً علاقة اللزوم بين المقدمات والنتائج . ونحن فى كل ذلك كنا نستخدم العلاقة كى تربط بها تارة بين ماصدق مفرد وآخر أو بين بعض الماصدقات وفئة من الفئات ، أو بين فئات بعضها مع بعض . وتارة أخرى بين قضايا وقضايا أخرى ، أو بين قضايا مسورة وقضايا أخرى ذات أسوار . كل ذلك بدون أن نتوقف عند العلاقة نفسها كى نحللها ونعرف خصائصها وصفاتها ، ونقيم الحساب التحليلى الخاص بها . وقد أصبح من اليسير علينا — بعد أن عرفنا العلاقات عن طريق استخدامها فى الفصول السابقة — أن نتناولها من حيث خصائصها وأن نقيم الحساب التحليلى الخاص بها .

فإذا تساءلنا بعد ذلك عن العلاقة ، استطعنا القول بأنها تلك الخاصية أو السمة التى تنتمى لموضوع ما مثل ا باعتباره مرتبطا بموضوع آخر هو ب (١) ، أو هى الرابطة التى يمكن أن تربط بين موضوع (أو أكثر) بموضوع آخر (أو أكثر).

وكما استخدمنا من قبل رموزا — كمتغيرات — للجزئيات المفردة وللفئات وللقضايا ودالاتها ، فسوف نستخدم كذلك الرموز « ع » ، « غ » ، « ر » . . . كمتغيرات للعلاقات . بحيث يشير الرمز « ع »(٢) مثلا لأى علاقة يمكن أن تنشأ بين موضوعين ، أيا كانت هذه العلاقة، ولا يشير إلى علاقة بعينها بالذات . ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا العبارة التالية : —

---

(١) Stebbing. S. : A Modern Introduction to Logic, P. 166

(٢) وقد استخدمنا الرمز « ع » لأنه أول حرف من حروف كلمة « علاقة » ، ويناظر الحرف R ، وهو أول حرف من حروف كلمة Relation .

« س أكبر من ص »

فإذا وضعنا بدلا من « أكبر من » المتغير « ع » لحصلنا على العبارة الرمزية التالية :—

« س ع ص »

ومعنى هذا أننا قد عممنا الحكم فى هذه العبارة ، فبدلا من أن نقول أن س ، ص يرتبطان بعلاقة هى « أكبر من » ، قلنا أن علاقة ما — وهى « ع » تربط بين س ، ص . فإذا ما أردنا التخصيص فى مقابل التعميم بعد ذلك جعلنا المتغير « ع » ثابتاً ، فقلنا « س أكبر من ص » أو « س أصغر من ص » أو « س = ص » . وهذا معنى قولنا أن الرمز « ع » لا يرمز لعلاقة بعينها ، بل لعلاقة ما ، مما يمكن أن تربط بين الحدين س ، ص .

وسنذكر فيما يلى ، قبل أن نعرض لتصنيف العلاقات ، بعض التعريفات (١) التى تتعلق بالنظرية العامة للعلاقات ، وذلك كما يلى :—

١ — للعلاقة — وهذا ما يتضح بصفة خاصة فى العلاقات الثنائية ، أى التى تربط بين حدين مثل س ، ص فى الصيغة «س ع ص» ، أو ا ، ب فى الصيغة «ا ع ب» — طرف تبدأ منه ، وهو س فى الصيغة الأولى ، وطرف تنتهى إليه ، وهو ص فى الصيغة نفسها .

ويسمى الطرف الأول referent بطرف البداية (٢) ، أو السابق predecessor

(١) ويمكن الرجوع فى هذا الصدد إلى كتاب « المنطق الوضعى » للدكتور زكى نجيب محمود ، الجزء الأول ، ابتداء من صفحة ١٥٣ ، وكذا إلى كتاب «مقدمة للفلسفة الرياضية » لبرتراند رسل ، الترجمة العربية ، صفحة ٥٥ .

(٢) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى ، الجزء الأول ، صفحة ١٥٣ .

على العلاقة (١) ، أو التعلق به (٢) . كما يسمى الطرف الثانى فى العلاقـة relatum بطرف النهاية ، أو نهاية العلاقة (٣) أو اللاحق Successor للعلاقة (٤) أو المتعلق(٥) ولقد فضلنا استخدام التعبيرين «طرف البداية» ، «طرف النهاية» فى العلاقة لأننا عادة ما نتكلم عن اتجاه Direction للعلاقة (٦) . فإذا قلنا مثلا «س يحب ص » كان اتجاه هذه العلاقة يبـدأ من طرف هو المحب إلى طرف الآخر هو المحبوب ، كما أن علاقة « والد » تبدأ من طرف هو الأب ، لـكى تنتهى إلى طرف آخر هو الابن (٧) .

وبما أن س ، ص فى الصيغة السابقة «س ع ص» متغيران يمكن أن نضع بدلا منهما أكثر من ثابت أو قيمة ، فإن هنـاك مجموعة من القيم الخاصة بـ « س » ، ومجموعة من القيم الخاصة بـ «ص» بحيث تتحدد كل مجموعة منهما بناء على العلاقة « ع » التى تربط بين س ، ص .

فلو كانت « ع » مثلا ترمز لعلاقة « على يمين » فى الصيغة :

« س ع ص »

فإننا نستطيع تحويل هذه الصيغة إلى أكثر من قضية مثل : —

---

(١) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.

(٢) وهو المصطلح الذى ورد فى الترجمة العربية لـكتابى « أصول الرياضيات » ، « مقدمة للفلسفة الرياضية » لبرتراند رسل .

(٣) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى ، (الجزء الأول) ، صفحة ١٥٣ .

(٤) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.

(٥) وقد ورد هـذا المصطلح فى الترجمة العربية لـكتابى برتراند رسل ، سالفى الذكر .

(٦) Stebbing, S. ; A. Modern Introduction to Logic, P. 167.

(٧) المرجع السابق ، صفحة ١٦٨ .

القلم على يمين الكتاب
الطالب على يمين زميله
منزلي على يمين منزلك ....

لكننا لا نستطيع مثلا القول بأن « الفضيلة على يمين الكتاب » . ومن ثم فهناك عالم مقال معين لقيم س ، ص ، يتحدد وفقاً للعلاقة « ع » أو بعبارة أخرى هناك نطاق لاستخدام الثوابت بدلا من المتغيرات س ، ص .

وعادة ما تسمى مجموعة الثوابت التي يمكن استبدالها بالمتغير «س» ، أي الفئة المكونة من كل البدايات ، باسم نطاق Domain العلاقة (١) ، كما يسمى النطاق الخاص بالمتغير « ص » عادة — بالنطاق المضاد Counter-domain أو النطاق العكسي Converse-domain وذلك تمييزاً له عن نطاق « س » . ومن ثم فالنطاق العكسي هو الفئة المكونة من كل النهايات التي تنتهي اليها العلاقة ، أو هو مجموعة الثوابت التي يمكن استبدالها بالمتغير ص .

كما يسمى عادة مجموع النطاقين : النطاق ، والنطاق العكسي باسم مجال Field (٢) العلاقة .

تصنيف العلاقات :

العلاقات تختلف تبعاً لاختلاف الموضوعات أو الحدود التي تربط بينها ، ولذا يمكن تصنيفها من أكثر من زاوية : —

---

(١) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.
(٢) Lee, H. : Symbolic Logic, p. 39.

أولا : من حيث نوع الحدود :

١ — فالعلاقات التى تربط بين حدود العبارة أو عناصر القضية الواحدة ، مثل :—

« س ع ص »

أو « ا ع ب »

تسمى عادة بالعلاقات العنصرية Constnent Relations[١] .

٢ — كما تسمى العلاقات التى تربط بين قضيتين أو أكثر باسم العلاقات المنطقية مثل علاقة « اللزوم » التى تربط بين ق ، ل فى الصيغة (ق ⊃ ل) ، والتى نعبر عنها بتغير العلاقة على النحو الآتى :—

« ق ع ل »

وغير ذلك من العلاقات[٢] .

---

(١) Langer, S. : A Introduction to Symbolic Logic, p. 10

(٢) وتذكر سوزان لانجر فى كتابها السابق « صفحة ٧٥ » أن العلاقات المنطقية الأساسية هى : ـ العطف والفصل واللزوم . ونحن كنا قد استخدمنا من قبل كلا من العطف والفصل على أنهما من الإجراءات التى تتخذ إزاء الفئات أو القضايا . ولذا سنذكرها كذلك حين نعرض للإجراءات المتبعة إزاء العلاقات . إرجع كذلك إلى :

Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, p. 166.

ثانياً : من حيث عدد الحدود :

ويسمى عدد الحدود المطلوبة لقيام العلاقة ، بدرجة Degree[1] العلاقة : ـ

١ ـــ والعلاقة قد تربط بين الحد الواحد ونفسه ، مثل علاقة « يساوى » مثلا التي تربط بين أى شيء ونفسه ، وهذا واضح كذلك من علاقة الهوية التي كنا نعبر عنها بالقول بأن « الشيء هو هو نفسه ولا يساوى إلا نفسه » . ومن ثم فإننا كنا نعبر عن مبدأ الهوية بقولنا :

س = س .

فإذا وضعنا متغير العلاقة بدلا من علاقة التساوى لحصلنا على الصيغة التالية : ـ

س ع س(٢)

وتسمى العلاقة فى هذه الحالة بالعلاقة الأحادية أو الواحدية Monadic. (وسوف نسميها فيما بعد بالعلاقة الانعكاسية) ، كما تسمى أيضاً بالعلاقة ذات المتغير الحر الواحد.

٢ ـــ أو قد تربط العلاقة بين حدين ، مثل :ـ

« س على يمين ص »

أو « س أكبر من ص »

وتسمى فى هذه الحالة بالعلاقة الثنائية dyadic ، أو قد تسمى كذلك بالعلاقة ذات المتغيرين الحرين . وتأخذ الصيغة العامة التالية : ـ

« س ع ص »

أو تأخذ أيضاً الصيغة التالية : ـ

---

(١) Langer, S. An Introduction to Symbolic Logic. P. 61

(٢) Lee, H. : Symbolic Logic, p. 34.

ع (س ، ص)(١)

٣ — أو قد تربط بين ثلاثة موضوعات أو حدود ، مثل : —

« س بين ص ، و »

أو : « س اشترى ص من و »

وتسمى العلاقة فى هذه الحالة بالعلاقة الثلاثية triadic(٢) ، أو بالعلاقة ذات المتغيرات الثلاثة ، وتأخذ الصيغة العامة التالية : —

ع (س ، ص ، و)(٣)

٤ — أو قد تربط بين أكثر من ثلاثة من الحدود ، وسنرمز للعدد غير المحدود من الحدود بالمتغير « ن » . وتسمى العلاقة فى هذه الحالة بالعلاقة كثيرة (أو متعددة) الحدود polyadic(٤) أو ذات «ن» من الحدود أو المتغيرات n-adic relation(٥) ، وتأخذ الصيغة العامة التالية : —

ع (س ، ص ، . . . . . . ن)

ثالثاً : من حيث طبيعة الحدود :

١ — علاقات من الدرجة الأولى of the first order ، وهى تلك التى تربط بين جزئيات مفردة مثل :

« س ع ص »

(١) Lee, H. : Symbolic Logic. p. 23
(٢) Langer, S. : An Introdiction to Symbolic Logic. p. 61
(٣) Lee, H. : Symbolic Logic. p. 23
(٤) Langer, S. : An Introduction to Symbolic Logic. p. 61
(٥) Lee, H. : Symbolic Logic, p. 50

٢ — أو علاقات مختلطة Mixed ، وتربط بين جزئيات مفردة وبين فئات ، مثل س ع ا (وقد عبرنا عنها فى حساب الفئات بالصيغة الرمزية : س (— ا) .

٣ — أو علاقات من الدرجة الثانية of the second order، وهى التى تربط أو تقوم بين فئات مثل « ا ⊃ ب » أو « ا = ب » ، ونرمز لها بالرمز : —

ا ع ب ،

أو التى تقوم بين علاقات من الدرجة الأولى (١) .

هذا وتسمى أحياناً العلاقة « ع » فى الصيــغ الشبيهة بالصيغة : —

س ع ص ، بعلاقة واحد بواحد .

أو بالصيغة : س ع ا ، بعلاقة واحد بكثير .

أو بالصيغة : ا ع س ، بعلاقة كثير بواحد .

أو بالصيغة : ا ع ب ، بعلاقة كثير بكثير .

وسوف نعود إلى توضيح ذلك حين نعرض لعلاقة التضايف المشترك فيما بعد . أما فيما يتعلق بالعلاقات من الدرجة الثانية التى تقوم بين علاقات وتربط بينها ، فيمكن أن نمثل لها بعلاقة التضمن أو الهوية أوغيرهما ، وسنعود إلى ذلك بشىء من التفصيل حين نعرض للعلاقات بين العلاقات .

أهم الاجراءات الخاصة بحساب الفئات :

١ — اجراء النفى Negation

ويسمى أحيانا باجراء الاكمال Comtplementation . وكما ذكرنا من قبل

---

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic. P. 89.

أن الفئة المكملة لفئة ما تكون هى نفى هذه الفئة ومن ثم كانت اَ مكملة الفئة ا ، فكذلك نقول عن نفى العلاقة ع ، بأنها العلاقة :

عَ

أو العلاقة المكملة العلاقة ع .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا العبارة التالية : « محمد أصغر من على » ،والتى نعبر عنها رمزيا بالصيغة :

« س ع ص »

وأردنا أن ننفى هذا القول ، وذلك لعلمنا أن محمدا الذى رمزنا له بالرمز س ليس أصغر من على ، فأمامنا أحد أمرين :—

١ — إما أن نقول بأن العبارة « محمد أصغر من على » هى قضية كاذبة ، ومن ثم فاننا نضع أمام صيغتها الرمزية ، علامة نفى القضية فنحصل على :—

« ـ (س ع ص) » .

٢ — أو أن ننفي العلاقة التى تربط بين محمد وعلى فنقول انهما لايرتبطان بعلاقة « أصغر من » . وفى هذه الحالة فاننا نضع علامة نفى الحد ، فوق المتغير « ع » ، فتصبح « عَ » ، ومن ثم نحصل على الصيغة التالية : —

(س عَ ص) .

والواقع أن الصيغتين الرمزيتين السابقتين ، تعبران عن معنى واحد ، وتدلان على كمية صدق واحدة ، وعن ثم فهما متكافئتان . ولذا فاننا عادة ما نعرف نفى العلاقة ، (بأنها العلاقة التى تربط بين شيئين فى حالة ما إذا كانت العلاقة ع لاتربط بينهما . وبعبارة أخرى ، فانه بالنسبة لأى س ، ص ، نجد أن الصيغتين :

س عَ ص ، ـ (س ع ص)

متكافئتان أو متساويتان) (١) ، وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزيا كما يلى :ـ

(س) (ص) [(س عَ ص) ≡ ـ (س ع ص)] .

كما أننا نستطيع التعبير عن العلاقة بين ع ، عَ فى هذه الحالة بالقول أنهما فى حالة تناقض ، بمعنى أن صدق أو كذب إحداهما يساوى نفى كذب أو صدق الأخرى (على الترتيب) . ومن ثم فاننا نحصل على : —

ع = $\overline{(عَ)}$ ، أى ع = عَ .

وعلى : عَ = $\overline{(ع)}$ ، أى عَ = ع .

هذا ويلاحظ أننا أحيانا حينما نشير إلى علاقة ما بثابت معين ، نستطيع الإشارة إلى ما يكمل هذه العلاقة بنفى الرمز الذى نتوصل اليه من ذلك الثابت بعد أن نضع عليه خطاً رأسيا أو مائلا ، (فنفى العلاقة > « أصغر من » مثلا ، غالبا ما نرمز له بالرمز « $\not<$ ») (٢) ، الذى يعنى « ليس أصغر من » . ولعلنا نذكر فى هذا الصدد علاقة « يساوى » بين الفئات ، أى « = » التى استخدمنا لنفيها علاقة « لا يساوى » أى « ≠ » ، وكذا علاقة « يكافئ » ، أى « ≡ » بين القضايا التى استخدمنا لنفيها علاقة « لا يكافئ » ، أى « $\not\leftrightarrow$ » .

٢ — إجراء العكس : Conversion

والإجراء فى هذه الحالة ينصرف أساساً إلى العلاقة لا إلى حدودها أو متغيراتها ، وهو فى هذا شبيه بالإجراء الذى توصلنا بواسطته إلى عَ من ع . ولتوضيح ذلك ،

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٢

(٢) المرجع السابق ، للوضع نفسه .

لنفرض أن لدينا العبارة السابقة : « محمد أصغر من على » ، أى : « س ع ص » . وكنا نعرف أن العكس صحيح ، وأن محمدا أكبر من على وليس أصغر منه فإننا فى هـذه الحالة لا ننفى العلاقة فقط ، بل نؤكد أن عكسها صحيح . وفى هذه الحالة أيضاً يكون أمامنا أحد أمرين .

١ — إما أن نقول « على أصغر من محمد » ، فنحصل على :—

(ص ع س)

وفى هذه الحالة نجد أن إجراء العكس قد انصرف بطريقة غير مباشرة إلى العلاقة عن طريق تغيير وضع النطاق والنطاق العكس فى مجال العلاقة . ونحن قليلا ما نستخدم هذه الطريقة . ولقد عبر تارسكى عن هذا المعنى بقوله : (العلاقة عَ تربط بين س ، ص ، فقط إذا كانت ع تربط بين ص ، س) (١) .

٢ — أو أن نقول بعكس العلاقة السابقة ، وذلك كما يلى :

(محمد « أكبر من » على) ،

فإذا ما أردنا أن نعبر عن العلاقة « أكبر من » ، وهى عكس العلاقة « أصغر من » فإننا نستخدم لها الرمز : « عَ » ، الذى يعبر عن عكس العلاقة « ع » - ومن ثم فإن عكس الصيغة العلاقية : (س ع ص) ، تكون هى :—

« س عَ ص »

وهكذا تكون الصيغتان : (ص ع س) ،
(س عَ ص)

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٣ .

متكافئتين أو متساويتين كما ذكر تارسكى من قبل . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً على النحو الآتى :—

$$(س) (ص) : [(س عّ ص) \equiv (ص ع س)] .$$

هذا ويلاحظ أننا أحياناً — وخاصة فى الرياضيات — حينما نشير إلى علاقة ما بثابت معين ، فنستبدل بتغير العلاقة « ع » مثلا الثابت « $<$ » الذى يدل على علاقة « أصغر من » ، فإننا نستطيع أن نضع ثابتاً آخر ، عكس الثابت الأول ، بتغيير وضع علامة الثابت الأول ، فنحصل مثلا على الرمز : « $>$ » الذى يدل على « أكبر من » وهى عكس العلاقة « أصغر من » وفى هذا الصدد يقول تارسكى : (إذا ما أشرنا إلى علاقة ما ، بثابت معين ، فإننا نشير إلى عكس هذه العلاقة بنفس الرمز فى وضع مقلوب . فعكس العلاقة «$\leq$» مثلا هى العلاقة «$\geq$» ، طالما أنه بالنسبة لأى س،ص، تكون الصيغتان التاليتان : س $\leq$ ص ، ص $\geq$ س متكافئتين) (١).

٣ — إجراء الجمع :

سوف نستخدم لإجراء الجمع بين العلاقات الرمز : « U » (٢) ، الذى كان استخدمه بيانو G. Peano للجمع بين الفئات ، وذلك تمييزا لهذا الإجراء ، عن إجراء الجمع بين الفئات (الذى استخدمنا له الرمز «+») ، وبين القضايا (الذى استخدمنا له الرمز « V ») .

والجمع قد يكون :—

١ — جمعاً العلاقة الواحدة بإضافتها إلى نفسها . وعلى ذلك يمكننا أن نكتب :

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٩١

ع U ع = ع . ع [1]

كما يمكن التعبير عن الجمع السابق ، بشكل أكثر وضوحاً لو كتبنا :

(س ع ص) U (س ع ص) ≡ (س ع ص)

وتقرأ : إن القول بأن س مرتبط بالعلاقة ع مع س ، أو بأن س مرتبط بالعلاقة ع مع ص ، وكررنا ذلك مرة أو أكثر من مرة ، فالنتيجة تكون مساوية لقولنا هذه العبارة العلاقية مرة واحدة فقط .

وبعبارة أخرى فإن تكرار القول بالعلاقة « ع » أو العلاقة « ع » أكثر من مرة مساو لقولنا بالعلاقة « ع » مرة واحدة فقط .

٢ — أو قد يكون جمعاً لعلاقتين مختلفتين . فلو كانت لدينا العلاقتان : « ع » « غ » مثلا ، فإننا نسمى الصيغة :

« ع U غ » ،

بحاصل الجمع المنطقى للعلاقتين ع ، غ . كما يمكن التعبير عن الجمع السابق ، بشكل أكثر وضوحاً لو قلنا أن حاصل الجمع المنطقى للصيغتين :

(س ع ص) ،

(س غ ص) ،

هى الصيغة : « س (ع U غ) ص » .

---

(١) وتناظر هــذه الصيغة ، الصيغة « ا + ا = ا » فى حساب الفئات ، والصيغة « ق v ق ≡ ق » فى حساب القضايا .

وفى هذا الصدد يمكن القول بأن الصيغة « ع U غ » ، تربط بين أى شيئين إذا كانت إحدى العلاقتين « ع » أو « غ » تربط بينهما . وبعبارة أخرى ، تكون الصيغة :

س (ع U غ) ص ،

مساوية أو مكافئة للشرط التالى : (س ع ص) أو (س غ ص)[1] . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً كما يلى :ــ

س (ع U غ) ص ≡ (س ع ص) U (س غ ص) .

ولكى تزداد هذه الصيغة وضوحاً ، نفرض أن « ع » ترمز لعلاقة الأبوة ، وأن « غ » ترمز لعلاقة « الأمومة » ، ومن ثم فإن الصيغة (ع U غ) ، تكون تعبيراً رمزياً لعلاقة الوالدية parenthood . ومن ثم فإننا نقرأ الصيغة :ــ

س (ع U غ) ص

على النحو الآتى : إن س يرتبط بعلاقة « الوالدية » مع ص ، فهو إما أن يكون « والد » ص أو « أم » ص .

٤ ــ إجراء الضرب :

وسوف نستخدم لإجراء الضرب بين العلاقات الرمز : « Ω » ، الذى كان يستخدمه بيانو للضرب بين الفئات ، وذلك تمييزاً لهذا الإجراء ، عن إجراء الضرب بين الفئات (الذى استخدمنا له الرمز « × ») ، وعن إجراء الضرب بين القضايا (الذى استخدمنا له الرمز « . ») .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩١ .

والضرب المنطقى للعلاقات قد يكون :

١ — ضرباً لعلاقة واحدة فى نفسها ، أى يكون تكراراً للعلاقة الواحدة . ويسمى فى هذه الحالة بإجراء تربيع العلاقة ، وتسمى نتيجة الضرب فى هذه الحالة بمربع Square العلاقة الأولى .

٢ — أو قد يكون ضرباً لعلاقتين مختلفتين ، ويسمى فى هذه الحالة بحاصل الضرب النسبى Relative Product .

أولا : تربيع العلاقة:

أى تكرار العلاقة الواحدة أو ضربها فى نفسها . وهو قد يؤدى : —

ا — إما إلى العلاقة ذاتها ، وفى هذه الحالة تكون : —

ع ∩ ع = ع

فإذا كانت « ع » ترمز لعلاقة « أخ » ، وكانت لدينا معرفة بثلاثة إخوة أشقاء هم : س ، ص ، و استطعنا أن نكتب :

(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : س ع و .

وهذا ما ينطبق على علاقات أخرى مثل « سالف » ancestor[1] ، أو « سابق على » ، أو « يساوى » ، أو « على يمين » . . وغير ذلك . وهكذا يكون مربع علاقة « يساوى » هو « يساوى » ومربع علاقة « سابق على » ، هو « سابق على » . . .

---

(١) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, p. 171

ب — وإما أن يؤدى تربيع العلاقة إلى علاقة أخرى ، وفى هذه الحالة تكون:

ع ∩ ع ≠ ع .

أى أنها تساوى علاقة أخرى غير « ع » ، ولتكن « غ » مثلا . ونعبر عن ذلك كما يلى :

ع ∩ ع = غ

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتى : لو كانت « ع » ترمز لعلاقة « والد » أو « أب » ، وكانت تربط بين ثلاثة حدود على النحو الآتى : —

(س ع ص) ، (ص ع و) .

أى إذا كان س والد ص ، وكان ص والد و ، فإن هذا لايعنى أن (س ع و) ، أى لا يعنى أن س والد و ، بل هو جد و . وعلاقة « جد » علاقة جديدة غير علاقة والد ، وإن كانت نتيجة لتكرارها أو لضربها فى نفسها مرتين . ويمكن التعبير عن ذلك المعنى بالقول الآتى : « بالنسبة لأى س ، ص ، و : فإنه لو كانت س ع ص ، وكانت ص ع و ، تكون إذن س غ و » . ونعبر عن ذلك رمزياً بواسطة إحدى الصيغ التالية : —

(س) (ص) (و) : [(س ع ص) . (ص ع و)] ⊃ (س غ و) .

أو : ⊃ س عَ و .

أو : ⟵/⟶ س ع و .

ومما هو جدير بالملاحظة أن عكس مربع العلاقة « والد » ، أى العلاقة « جد » ، هو مربع العلاقة « إبن » ، أى العلاقة « حفيد »[1] .

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

ثانياً : الضرب النسبي :

وعادة ما يكون حاصل الضرب النسبي بين علاقتين مختلفتين ، مثل « ع » ، « غ » ، ويرمز له في هذه الحالة بالصيغة : ـ

« ع ∩ غ »

وإن كان هناك رمز شائع الاستخدام في كتب المنطق للتعبير عن الضرب النسبي بين العلاقات وهو الرمز « / » بدلا من الرمز « ∩ » ، لذا عادة ما يرمز للضرب النسبي بين العلاقتين ع ، غ بالصيغة :

(ع / غ) ،(١)

وهي الصيغة التي سوف نستخدمها في هذا الكتاب للتعبير عن الضرب النسبي لعلاقتين . ويعرف الضرب النسبي للعلاقتين ع ، غ بأنه تلك العلاقة التي تربط بين موضوعين ، مثل س ، ص ، فقط إذا كان هناك شيء ثالث هو « و » بحيث تكون « س » مرتبطة بالعلاقة «ع» مع « و » ، أي (س ع و) ، وتكون « و » مرتبطة بالعلاقة « غ » مع « ص » ، أي (و غ ص) في الوقت نفسه . ولنأخذ لذلك المثال الآتي : —

إذا كانت « ع » مثلا ترمز لعلاقة « زوج » husband ، وكانت « غ » ترمز علاقة « إبنة » daughter ، كانت العلاقة « ع / غ » ترمز لعلاقة « زوج الابنة »(٢) ، أي العلاقة التي تربط بين شخصين هما س ، ص ، إذا وجدت « و »

---

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 92.

(٢) Church, A. : Introduction to Mathematical Logic, Vol. I, P. 316.

بحيث يكون « س » هو زوج « و » ، وتكون « و » هى إبنة « ص » . ومن ثم فإننا نقرأ الصيغة :

س « ع / غ » ص

على النحو الآتى : س زوج إبنة ص (١)

فإذا أردنا أن نحصل على عكس حاصل الضرب النسبى « ع / غ » ، فإننا نضع علامة العكس على الرمز كله ، وذلك على النحو الآتى :

$\overbrace{(\text{ع} / \text{غ})}$ ،

أو بتغيير وضع العلاقتين ، وعكس كل منهما على حدة مثل :

$\breve{\text{غ}} / \breve{\text{ع}}$

ومن ثم فإننا نحصل على :

$\overbrace{(\text{ع} / \text{غ})} = \breve{\text{غ}} / \breve{\text{ع}}$ (٢)

هذا ويلاحظ رسل فى كتابه « مقدمة للفلسفة الرياضية » إن حاصل الضرب النسبى للعلاقات ليس من الضرورى أن يكون متبادلا (٣) ، بمعنى أن العلاقة « ع/غ » ليس من الضرورى أن تكون مساوية للعلاقة « غ/ع » . إذ أن حاصل

---

(١) Tarski, A.: Introduction to Logic, P. 92.

(٢) Stebbing, S.: A. Modern Introduction to Logic, P. 171.

(٣) وكان أول من تنبه إلى مثل هذه الملاحظة هو تشارلز بيرس عالم المنطق الأمريكى . إرجع إلى دراسة لنا نشرت عن المنطق الصحيح « لتشارلز بيرس فى مجلة تراث الانسانية ، المجلد السابع العدد ٢ ، صفحة ١٥٠

الضرب النسبى للعلاقتين ع ، غ فى الصيغة : (س « ع/غ » ص) يعنى زوج الإبنة كما رأينا من قبل ، لكن حاصل الضرب النسبى للعلاقتين غ ، ع فى الصيغة :

س « غ / ع » ص ،

يعنى إبنة الزوج daughter-in law . ويمثل لذلك رسل بقوله : (إن حاصل الضرب النسبى للوالد والأخ هو العم ، أما حاصل الضرب النسبى للأخ والوالد هو الوالد) . (١)

أهم خصائص العلاقات :ــ

سنذكر فيما يلى أهم خصائص العلاقات (والعلاقات الثنائية منها بصفة خاصة) :ــ

١ ــ الانعكاس Reflexiveness

والانعكاس صفة للعلاقة التى يرتبط بها أى حد مع نفسه (٢) . وفيما يتعلق بهذه الصفة فاننا نجد ثلاثة إمكانات :ــ

ا ــ أن تكون العلاقة انعكاسية reflexive حينما تربط بين أى حد ونفسه (٣) أو حين تستوفى دائماً الشرط التالى :ــ

« س ع س » (٤)

ويمكن توضيح ذلك بذكر أمثلة لعلاقات تتصف بهذه الصفة ، مثل علاقة

---

(١) رسل : مقدمة الفلسفة الرياضية ، (الترجمة العربية) صفحة ٧٦ .

(٢) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, P. 168.

(٣) المرجع السابق ، صفحة ١٦٧ .

(٤) Lee, H. : Symbolic Logic, P. 34.

« التساوى » بين الحد الواحد ونفسه (س = س) أو بين الفئة ونفسها (ا=ا)
أو علاقة « التكافؤ » بين القضية ونفسها (ى ≡ ى) . فكل شىء - أياً كان -
يساوى نفسه ولا يساوى إلا نفسه ، ويكون دائماً هو هو . ومثل علاقة « اللزوم »
لأن كل قضية تستلزم نفسها : (ى ⊃ ى) ، ومثل علاقة « التضمن » لأن كل فئة
تكون متضمنة فى نفسها : (ا ⊂ ا) ، وغير ذلك .

ب — أو أن تتصف العلاقة بعدم الانعكاس irreflexiveness وذلك فى حالة ما إذا لم تكن صالحة للربط بين الحد الواحد ونفسه . مثل العلاقة « أكبر من » أو « أصغر من » . فالشىء الواحد لا يكون « أكبر من » نفسه ، ولا « أصغر من » نفسه . وهذا ما نعبر عنه رمزياً بالصيغة التالية :—

- (س ع س) .

وتسمى مثل هذه العلاقة ، بالعلاقة اللا انعكاسية irreflexive (١) ، ويسميها رسل بالعلاقة المحوية فى التعدد Contained in diversity أو التى تستلزم التعدد implying diversity (٢) ، أو بالعلاقة الغريبة (أو المغايرة) alio-relative (٣)

---

(١) Tarski, A. ; Introduction io Logic, P. 93.

(٢) رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية . (الترجمة العربية) صفحة ٥٥ .

(٣) وكلمة alio-relative من وضع تشارلز بيرس عالم المنطق الأمريكى . أنظر:
Stebbing, S. ; A Modern Introduction to Logic, P. 169.

وقد وردت ترجمة هذه الكلمة ، فى الترجمة العربية لكتاب برتراند رسل « مقدمة للفلسفة الرياضية » صفحة ٥٥ ، باسم العلاقة الغريبة ، كما اقترح الأستاذ الدكتور زكى نجيب محمود ترجمتها بالعلاقة المغايرة (انظر هامش صفحة ٥٥ من المرجع نفسه) .

وسوف نأخذ بتسميتها بالعلاقة اللا انعكاسية حتى يكون هناك اتساق بين المصطلحات العربية مثل اللا انعكاس واللا تماثل ... وغير ذلك .

حـ — أو أن توصف العلاقة بانها جائزة الانعكاس non-reflexive وذلك حينما لا تكون العلاقة انعكاسية ، أو لا انعكاسية ، أو بمعنى آخر حينما يمكن أن تكون هذا ويمكن أن تكون ذاك . مثل علاقة « يعجب » أو علاقة « يكره » ، فالإنسان لا يعجب بنفسه دائما أو يكره نفسه ، بل هو أحيانا ما يفعل ذلك(١) .

وهكذا إذا اعتبرنا أن « س ع س » هو شرط اتصاف العلاقة بالانعكاس ، استطعنا أن ننتهى إلى :

١ — أن العلاقة الانعكاسية ، تستوفى هذا الشرط دائما .

٢ — أن العلاقة اللا انعكاسية ، لا تستوفى هذا الشرط إطلاقا .

٣ — أن العلاقة جائزة الانعكاس ، لا هى بالتى تستوفيه دائما ولا هى بالتى لاتستوفيه إطلاقا .

٢ — التماثل Symmetry

وهى صفة تتصف بها العلاقات التى تفيد معنى التبادل فى الاتجاه . وفيما يتعلق بهذه الصفة ، توجد ثلاثة إمكانات هى :

أ — أن تكون العلاقة تماثلية Symmetrical إذا كان اتجاه العلاقة متبادلا بين طرف البداية فيها وطرف النهاية . فإذا كانت (س ع ص) ، ترتب على ذلك أن تكون (ص ع س) أيضا . ولذا يقال بان العلاقة تكون تماثلية إذا كانت

---

(١) Lee, H. ; Symbolic Logic, P. 34.

تستوفى دائماً الشرط التالى : « إذا كانت (س ع ص) ، كانت إذن (ص ع س) »(١) ، وهو ما نعبر عنه رمزيا على النحو الآتى :

(س ع ص) ⊃ (ص ع س)

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقة التالية : « أخ » ، لأنه إذا كان س « أخ » ص ، كان كذلك ص « أخ » س . وكذلك علاقة « ابن عم » ، فإذا كان س « ابن عم » ص ، كان ص كذلك « ابن عم » س . وأيضا علاقة « يساوى » ، لأنه إذا كانت س = ص ، كانت كذلك ص = س . ومثلها علاقة « لا يساوى » ، لأنه إذا كانت س ≠ ص ، كانت أيضا ص ≠ س . وغير ذلك .

ولذا يمكن التعبير عن علاقة التماثل (أو صفة التماثل فى العلاقة) بقضية اللزوم التالية :

« بالنسبة لأى س ، ص تكون س ع ص تستلزم ص ع س »(٢) ، أو بالصيغة الرمزية التالية :

(س) (ص) [(س ع ص) ⊃ (ص ع س)] .

ب — أو أن تكون العلاقة لا تماثلية asymmetrical ، وهى تتصف بهذه الصفة حين تكون ذات اتجاه واحد فقط ، فلا تقبل الارتداد من طرف النهاية إلى طرف البداية فيها . ويعبر تارسكى عن ذلك بقوله : إذا كانت الصيغة (س ع ص) تستلزم الصيغة « -(ص ع س) » ، قيل أن العلاقة ع لا تماثلية (٣) . ومن ثم

---

(١) Lee, H. ; Symbolic Logic, P. 32.

(٢) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 93.

(٣) المرجع السابق ، صفحة ٩٤ .

فإننا نعبر عن ذلك بالقول بأن العلاقة اللاتماثلية ، لا تستوفى أبداً الشرط السابق ذكره ، أى الشرط الخاص بالتماثل وهو : (س ع ص) ⊃ (ص ع س) .

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقات التالية على سبيل المثال : علاقة « والد » ، فإذا كان س « والد » ص ، فإنه لا يمكن أن يكون ص « والد » س . ومثل علاقة « قبل » ، فإذا كانت س « قبل » ص ، فإنه لا يمكن أن تكون ص قبل س . ومثل علاقة « أطول من » فإذا كانت س « أطول من » ص ، فإن ص لا يكون « أطول من » س .

ولذا يمكن التعبير عن علاقة اللاتماثل ، أو عن صفة اللاتماثل فى العلاقة ، بالصيغة الرمزية التالية : —

(س) (ص) [(س ع ص) ⊃ ~ (ص ع س)] .

حـ — أو أن تكون العلاقة جائزة التماثل non-symmetrical وتتصف بهذه الصفة إذا كان إتجاه العلاقة مما يمكن أن يرتد من طرف النهاية فيها إلى طرف البداية أو ألا يرتد . مثل علاقة « يحب » وعلاقة « يكره » حين تربط بين س ، ص .
فإذا كانت (س ع ص) — « أى : س يحب ص » — فمن الجائز أن تكون (ص ع س) — « أى : ص يحب س » فتكون العلاقة تماثلية ، ومن الجائز أن تكون « ~ (ص ع س) » أو (ص عَ س) — « أى ألا يكون ص يبادل س نفس الشعور ومن ثم فلا يحبه ، اى : ص لا يحب س » .

ويمكن التعبير عن ذلك المعنى رمزياً كما يلى : —

(س) (ص) [(س ع ص) ⊃ (ص ع س) v ~ (ص ع س)] .
وهكذا فنحن إذا ما اعتبرنا أن تحقيق الصيغة التالية : —

(س ع ص) ⊃ (ص ع س)

هو شرط إتصاف العلاقة بالتماثل ، فإننا نستطيع الانتهاء إلى :—[1]

١ — أن العلاقة التماثلية ، تستوفى هذا الشرط دائماً .

٢ — أن العلاقة اللاتماثلية ، لا تستوفى هذا الشرط أبداً .

٣ — أن العلاقة جائزة التماثل ، لا هى بالتى تستوفيه دائماً ، ولا هى بالتى لا تستوفيه إطلاقاً .

٣ — التعـــدى Transitivity :

ويعنى إمكان قيام العلاقة التى تربط بين حدين ، بين أحد هذين الحدين وحد ثالث . وفيما يتعلق بصفة التعدى ، توجد كذلك ثلاثة إمكانات هى :—

ا — أن تكون العلاقة متعدية Transitive ، وذلك : (إذا كان — بالنسبة لأى س ، ص ، و — الشرطان التاليان : (س ع ص) ، (ص ع و) ، يستلزمان الصيغة س ع و)[2] . أو بعبارة أخرى ، تكون العلاقة متعدية إذا كانت تستوفى الشرط التالى : « إذا كانت س ع ص ، وكانت ص ع و ، كانت إذن س ع و »[3] . وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتى :—

(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : س ع و .

ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا بدلاً من «ع» علاقة « أكبر من » ، فنحصل على : إذا كانت س أكبر من ص ، وكانت ص أكبر من و ،

---

(١) Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 32

(٢) Tarski, A. ; Introduction to Logic, p. 94

(٣) Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 33

كانت إذن س أكبر من و . أو العلاقة «على يمين» ، فنحصل على : إذا كانت س على يمين ص ، وكانت ص على يمين و ، كانت إذن س على يمين و ، ومثل علاقة «قبل» أو «بعد» أو غير ذلك .

ولذا يمكن التعبير عن العلاقة المتعدية — أو عن صفة التعدى فى العلاقة — بقضية اللزوم التالية :

(س) (ص) (و) [(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : (س ع و)] .

ب — أو أن تكون العلاقة لا متعدية ، أو لازمة Intransitive . وتتصف العلاقة بهذه الصفة إذا لم تكن تتعدى الربط بين حدين فقط إلى حد ثالث . أو بعبارة أخرى إذا كانت لا تستوفى الشرط السابق : (س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : (س ع و) إطلاقاً . أو بمعنى آخر إذا كانت : (س ع ص) . (ص ع و) ، تستلزمان دائماً « ـ (س ع و) » . ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا بدلا من « ع » علاقة « والد » ، فنحصل على : — إذا كان س والد ص ، وكان ص والد و ، فان س لا يكون والد و ، بل سيكون « جد » و . ولذا يمكن التعبير عن صفة اللزوم أو اللا تعدى فى العلاقة ، بالصيغة التالية : —

(س) (ص) (و) [(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : ـ (س ع و)] .

حـ — أو أن تكون العلاقة جائزة التعدى non-transitive ، وهى تتصف بهذه الصفة إذا كان من الجائز ، وليس من الضرورى أن تتعدى الربط بين حدين إلى حد ثالث ، أو بعبارة أخرى إذا كانت لا هى بالتى تستوفى الشرط السابق ذكره للتعدى ، دائماً ، ولا هى بالتى لا تستوفيه أبداً . مثل علاقة «صديق» ، فاذا كان س صديق ص ، وكان ص صديق و ، فانه من الجائز أن يكون س صديق و (كأن

أقول بأن صديق صديق هو صديق) ، ومن الجائز أن لا يكون س صديق و . ومثل علاقة «يحب» فاذا كان س يحب ص ، وكان ص يحب و ، فانه من الجائز أن يحب س أو ألا يحب و . ويمكن التعبير عن صفـــة جواز التعدى فى العلاقة رمزياً على النحو الآتى : —

(س) (ص) (و) [(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : (س ع و) ٧ ~ (س ع و)] .

وهكذا فنحن إذا ما اعتبرنا أن الصيغة التالية : —

(س ع ص) . (ص ع و) : ⊃ : (س ع و)

هى شرط اتصاف العلاقة بالتعدى ، استطعنا أن ننتهى إلى : — (١)

١ — أن العلاقة المتعدية تستوفى هذا الشرط دائماً .

٢ — أن العلاقة اللا متعدية (اللازمة) ، لا تستوفى هذا الشرط أبداً .

٣ — أن العلاقة جائزة التعدى ، لا هى بالتى تستوفى هذا الشرط دائماً ، ولا هى بالتى لا تستوفيه إطلاقاً .

٤ — التضايف المشترك : Correlation

ويمكن تصنيف العلاقات التى تتصف بهذه الصفة إلى : —

أ — علاقة واحد بواحد one-one relation

وتقوم حينما يوجد فى مقابل كل حد من حدود نطاق العلاقة ، حد آخر فى

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

النطاق العكسى يرتبط به بهذه العلاقة ، وبحيث لا يرتبط أى حد آخر من حدود النطاق ، بالعلاقة ذاتها ، مع الحد نفسه الموجود فى النطاق العكسى .

وهكذا فالتعلق بالتضايف المشترك عن طريق واحد بواحد إنما يقوم بين أحد حدود النطاق وأحد حدود النطاق العكسى . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً على النحو الآتى :—

« إذا كانت س ع ص ، وكانت س ع ن ، كانت إذن ن = ص ، وأنه فى الوقت نفسه إذا كانت س ع ص ، وكانت و ع ص ، كانت إذن و = س » (١)، أو نعبر عنه بصيغة رمزية أخرى على النحو الآتى :—

(س ع ص) . (س ع ن) : ⊃ : ن = ص ،

(س ع ص) . (و ع ص) : ⊃ : و = س

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقة التى تقوم بين أى عضو فى فئة معدودة ، وبين عضو آخر فى فئة أخرى مماثلة لها عددياً . فعلاقة «زوج» أو «زوجة» — فى المجتمعات التى تأخذ بالزواج الواحد monogamy ، هى علاقة واحد بواحد طالما أن هناك زوجة واحدة لكل زوج وأن هناك زوجاً واحدا لكل زوجة(٢) .

ب — علاقة واحد بكثير one-many relation

وترتبط بين أى حد من حدود نطاق العلاقة ، وبين أكثر من حد من حدود نطاقها العكسى ، بحيث لا يكون أى حد من حدود النطاق مرتبطا بنفس العلاقة

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٤٠ .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤١ .

مع نفس الحدود فى النطاق العكسى . مثل علاقة « زوج » فى المجتمعات التى تأخذ بنظام تعدد الزوجات إذ فى مقابل الزوج الواحد قد توجد أكثر من زوجة . ومثل علاقة « التربيع » فى مجال الأعداد ، فالعدد ٩ مثلا هو مربع العددين : «٣» ، «— ٣» .

وهكذا يمكن تعريف علاقة واحد بكثير على النحو الآتى : « إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (و ع ص) ، كانت إذن و = س » (١)

وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزيا بالصيغة التالية : —

(س ع ص) . (و ع ص) : ⊃ : و = س .

(حـ) علاقة كثير بواحد many — one relation

وترتبط بين عدد من حدود النطاق الخاص بالعلاقة ، وبين أى حد من حدود نطاقها العكسى ، بحيث لايكون أى حد آخر من حدود النطاق العكسى مرتبطا بنفس العلاقة مع الحدود ذاتها فى النطاق .

ويمكن بصفة عامة القول بأن علاقة كثير بواحد تقابل علاقة واحد بكثير ، بمعنى أن كلا منهما مما يمكن أن تتحول إلى الأخرى باستخدام عكس العلاقة مع تغيير وضع النطاق والنطاق العكسى بالتبادل (٢) . مثل علاقة الزوجات بالزوج فى المجتمعات التى تأخذ بنظام تعدد الزوجات فهى علاقة كثير بواحد وهى عكس علاقة الزوج بالزوجات ، ومثل علاقة « إبن » ، أى علاقة الأبناء بالأب . فهى علاقة كثير بواحد ، وهى عكس علاقة «أب» ، أى علاقة الأب بأبنائه ، فهى علاقة واحد بكثير .

---

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .
(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤١ .

وهكذا يمكن التعبير عن علاقة كثير بواحد على النحو الآتى : —

« إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (س ع و) ، كانت إذن و = ص »(١)

وهذا مايعبر عنه رمزيا بالصيغة التالية :

(س ع ص) . (س ع و) : ⊃ : و = ص

ى — علاقة كثير بكثير many-many relation

وتربط بين أكثر من حد من حدود النطاق ، وبين أكثر من حدود النطاق العكسى . مثل علاقة « يسبق » فى مجال الأعداد الطبيعية ، فالأعداد : ٢ ، ٣ ، ٤ كلها تسبق الأعداد ٦ ، ٧ ، ٨ . (ويلاحظ أننا لو قلنا بعلاقة « يسبق مباشرة » لكانت علاقة واحد بواحد ، طالما أنه يوجد فى مقابل كل عدد طبيعى ، عدد واحد فقط سابق له مباشرة) ومثل علاقة « والد » Parent of ، فهى علاقة كثير بكثير ، طالما أن أى والد من الممكن أن يكون له أكثر من طفل ، وأن لكل طفل والدين two parents (هما الأب والأم) . (٢)

وهكذا لو استطعنا تلخيص شروط التضايف المشترك فى الشرطين الأساسيين التاليين : —

١ — (س ع ص) . (و ع ص) : ⊃ : و = س .

٢ — (س ع ص) . (س ع و) : ⊃ : و = ص .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٤٢ .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤٣ .

لانتهينا إلى : —

١ — أن علاقة واحـــد بكثير تستوفى الشرط الأول ، لـكن لا تستوفى الشرط الثانى .

٢ — أن علاقة كثير بواحد تستوفى الشرط الثانى ، لـكن لاتستوفى الشرط الأول .

٣ — أن علاقة واحد بواحد تستوفى الشرطين معاً .

٤ — أن علاقة كثير بكثير لاتستوفى الشرطين معاً(١)

هذا ويمكننا أن نلاحظ كذلك مايأتى : —

١ — أن عكس علاقة واحد بواحد ، هى كذلك علاقة واحد بواحد .

٢ — أن عكس علاقة واحد بكثير ، هى علاقة كثير بواحد .

٣ — أن عكس علاقة كثير بواحد ، هى علاقة واحد بكثير .

٤ — أن عكس علاقة كثير بكثير ، هى أيضا علاقة كثير بكثير(٢)

٥ — الترابط (أو الاتصال) Connexty(٣)

وهى الصفة التى تتصف بها العلاقة التى تربط بين أى حدين نختارهما جزافاً من أية مجموعة أو فئة ، مثل علاقة « أكبر من » التى تربط بين أى عددين نختارهما من بين متسلسلة الأعداد الصحيحة مثل علاقة « قبل » وعلاقة « بعد » ، وكذا علاقة « على يمين » أو « على يسار » بالنسبة لأى نقاط على خط مستقيم واحد . ويعرفها تارسكى

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٤٢

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤٣

(٣) وقد وردت هذه الصفة فى الترجمة العربية لـكتاب رسل « مقدمة الفلسفة الرياضية » ، صفحة ٥٦ ، باسم « التواصل » .

بقوله :(بالنسبة لأى عضوين مختلفين س، ص فى الفئة ا ، إذا كانت إحدى الصيغتين التاليتين : س ع ص ، ص ع س ، صحيحة ، أى إذا كانت العلاقة ع تربط فى إتجاه واحد على الأقل بين عنصرين جزافيين فى الفئة ا ، سميت هذه العلاقة ، بالعلاقة المترابطة) (١)

ملاحظات تتعلق بخصائص العلاقات :

أولا : إن ذكرنا لأهم خصائص العلاقات على النحو السابق ، لا يعنى أن تكون العلاقة إما متصفة بهذه الصفة فقط أو تلك . فليس هناك ما يمنع من إتصاف العلاقة الواحدة بأكثر من صفة . وهكذا يمكن أن نتصور العدد الكبير من الصفات المركبة التى تتصف بها العلاقات ، أو بمعنى أكثر دقة عدد العلاقات ذات الخصائص المركبة ، لو أخذنا صفتين فقط من الصفات السابقة ، هما صفة التماثل بالنسبة لصفة التعدى مثلا ، فإننا نستطيع التوصل إلى عدد لا يقل عن تسع صفات مركبة ، أو علاقات ذات صفات مركبة ، طالما أن كلا من صفتى التعدى والتماثل من أنواع ثلاثة ، فيكون ناتج التركيب مساوياً لـ : ٣^{٢} = ٩ ، هى على سبيل المثال :—

١ — علاقة متعدية تماثلية ، مثل علاقة « يساوى » .

٢ — علاقة متعدية لا تماثلية ، مثل علاقة « سلف » ancestor .

٣ — علاقة متعدية جائزة التماثل ، مثل علاقة « يستلزم » .

٤ — علاقة لازمة تماثلية ، مثل علاقة « مجاور لـ » next door to .

٥ — علاقة لازمة لا تماثلية ، مثل علاقة « أب » .

---

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, p. 94.

٦ — علاقة لازمة جائزة التماثل ، مثل علاقة « أخ توأم » twin brother of.

٧ — علاقة جائزة التعدى تماثلية ، مثل علاقة « ابن عم » .

٨ — علاقة جائزة التعدى لا تماثلية ، مثل علاقة « خادم لـ » .

٩ — علاقة جائزة التعدى جائزة التماثل ، مثل علاقة « يعجب بـ »(١)

أما إذا أدخلنا فى إعتبارنا الصفات الثلاث التالية : التعدى ، والتماثل ، والانعكاس ، فإننا نستطيع التوصل إلى عدد كبير من الصفات المركبة التى تتصف بها العلاقات ، تساوى ٣^٣ = ٢٧(٢) ، وهو عدد كبير من العلاقات نستطيع التوصل إليه من مثل هذا التأليف ، أو التركيب . وحتى لا نخطىء فى مثل هذا التركيب بين الصفات فى العلاقات ، فإننا نستطيع إتباع بعض القواعد التى نهتدى بها فى هذا الصدد مثل : —

١ — إذا كانت العلاقة متعدية وتماثلية ، فهى إنعكاسية ، مثل علاقة « يساوى » .

٢ — إذا كانت العلاقة متعدية ولا تماثلية ، فهى لا إنعكاسية ، مثل علاقة « سلف » .

٣ — إذا كانت العلاقة متعدية ولا إنعكاسية ، فهى لا تماثلية ، مثل علاقة « سلف » .

٤ — إذا كانت العلاقه تماثليه ولا انعكاسيه ، فهى إما أن تكون لازمه (مثل علاقه « مجاور لـ » next-door neighbor of) ، أو جائزة التعدى (مثل علاقه « موازلـ » Parallel to) .

---

(١) Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 34.

(٢) وهذا العدد من العلاقات بعضه متداخل مع البعض الآخر .

٥ — إذا كانت العلاقه تماثليه وانعكاسيه ، فهى إما أن تكون متعديه ، أو جائزة التعدى .

٦ — إذا كانت العلاقه لاتماثليه ، فهى لا انعكاسية (١)

ثانيا : كما يلاحظ أن العلاقات التى تتصف بكونها لاتماثلية ، ومتعدية ومترابطة(٢)، إنما تفيد معنى الترتيب بين الحدود الخاصة بهذه العلاقه . ويعبر رسل عن هذا بقوله: (عندما يكون لعلاقه هذه الخواص الثلاث ، فهى من قبيل تلك العلاقات التى تعطي ترتيبا للحدود التى تقوم بينها . وكلما وجد ترتيب ، فيمكن إيجاد علاقه ما لها هذه الخواص الثلاث التى تولد هذا الترتيب) (٣) ولنأخذ لذلك مثلا علاقة «أصغر من» بين فئة الأعداد الصحيحة، فهى علاقه لاتماثليه فى أيه فئه من الأعداد . وهذا ما نعبر عنه رمزيا كما يلى : —

(س ⊲ ص) ⊃ (ص ⋪ س) (٤)

وهى أيضا علاقة متعدية ، وهذا ما نعبر عنه رمزيا كما يلى : —

(س ⊲ ص) . (ص ⊲ و) : ⊃ : (س ⊲ و) .

كما أنها علاقة مترابطة ، طالما أنه من الضرورى بالنسبة لأى عددين مختلفين أن يكون أحدهما أصغر من الآخر . وهى أيضاً علاقة لا إنعكاسية طالما أن أى عدد لا يكون أصغر من نفسه . وعلى ذلك فإن أية فئة من الأعداد يتم ترتيبها وفقاً لعلاقة أصغر من(٥) .

---

(١) المرجع السابق ، صفحه ٣٨

(٢) Tarski, A. : Introduction to Logic. P. 97.

(٣) رسل : مقدمه للفلسفه الرياضية . (الترجمة العربية) ، صفحة ٥٤

(٤) أى أن : (س ⊲ ص) ⊃ (ص > س) .

(٥) Tarski, A. ; Introduction to Logic p. 67.

أهم العلاقات التى تنشأ بين العلاقات :

١ — علاقة التضمن :

وتسمى أحيانا باسم علاقة الاندراج . ويمكن تعريفها بالقول بأن العلاقة «ع» متضمنة فى العلاقة «غ» أو مندرجة تحتها — باستخدام الرموز — على النحو الآتى:

«ع ⊃ غ»

إذا كان القول التالى صادقا : (كلما ربطت «ع» بين موضوعين ، ربطت كذلك «غ» بينهما بطريقة مماثلة) (١) . أو بعبارة أخرى فإنه بالنسبة لأى س ، ص ، إذا كانت الصيغة (س ع ص) تستلزم الصيغة (س غ ص) . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً بالصيغة :—

(س) (ص) [(س ع ص) ⊃ (س غ ص)]

ولتوضيح ذلك ، نفترض أن «ع» ترمز للعلاقة «أصغر من» ، وأن «غ» ترمز للعلاقة «لا يساوى» . وعلى ذلك فإنه بوضع ماتدل عليه ع ، غ فى الصيغة السابقة فإننا نحصل على : «بالنسبة لأى س ، ص ، إذا كانت س أصغر من ص ، كانت إذن س لا تساوى ص . وهذا ما نعبر عنه رمزياً بالصيغة :

(س) (ص) [(س < ص) ⊃ (س ≠ ص)]

ومن ثم تكون علاقة «أصغر من» متضمنة فى علاقة «عدم التساوى» . وذلك يتضح من القول بأن «عدم التساوى» يتضمن ما هو «أصغر من» ، وما هو «أكبر من» . وهذا ما نعبر عنه بالصيغة التالية :—

(س) (ص) [(س ≠ ص) ⊃ (س < ص) v (س > ص)]

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٠ .

هذا ويلاحظ أن علاقة التضمن ، كعلاقة تقوم بين علاقات ، تتصف بأنها : —

إنعكاسية : لأن أية علاقة يمكن أن تكون متضمنة فى نفسها ، مثل :

ع ⊃ ع .

وجائزة التماثل : لأن الصيغة (ع ⊃ غ) لا تستلزم (غ ⊃ ع) كما أنها لا تستبعدها أيضاً . (ويلاحظ أنه لايتم إستيفاء الصيغتين معاً إلا إذا كانت ع = غ) .

بمعنى أنه لو كانت : (س ع ص) ⊃ (س غ ص) ،

فإن هذا يستلزم أن تكون : (س غ ص) ⊃ (س ع ص) .

أو أن تكون : (س غ ص) ⊃ - (س ع ص) .

وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتى : —

[(س ع ص) ⊃ (س غ ص)] : ⊃ : [(س غ ص) ⊃ (س ع ص)]
v [(س غ ص) ⊃ - (س ع ص)]

أى : (ع ⊃ غ) : ⊃ : (غ ⊃ ع) v (غ ⊃ عَ)

ومتعدية : وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتى : —

(ع ⊃ غ) . (غ ⊃ ر) : ⊃ : (ع ⊃ ر)

ويمكن توضيح ذلك بالمثال الآتى : —

لو كانت « ع » ترمز لعلاقة « على اليمين المباشر » ، وكانت « غ » ترمز لعلاقة « مجاور لـ » وكانت « ر » ترمز لعلاقة « قريب من near to » ، إستطعنا أن نقول : لو كان منزلى على اليمين المباشر لمنزلك ، أى (س ع ص) ، فإنه يلزم عن ذلك أن يكون منزلى « مجاور » لمنزلك ، أى (س غ ص) . وإذا كان منزلى

مجاور لمنزلك ، لزم عن هذا أن يكون منزلى قريباً من منزلك ، أى (س ر ص).
ومن ثم تكون علاقة « على اليمين المباشر » وهى « ع » متضمنة فى علاقة « مجاور » وهى « غ » ، وتكون علاقة « مجاور » متضمنة فى علاقة « قريب من » وهى « ر » . وهذا ما نعبر عنه رمزياً كما يلى :—

[(س ع ص) ⊃ (س غ ص)] . [(س غ ص) ⊃ (س ر ص)]
: ⊃ : [(س ع ص) ⊃ (س ر ص)]

اى أن : (ع ⊃ غ) . (غ ⊃ ر) : ⊃ : (ع ⊃ ر).

هذا ولا يفوتنا أن نذكر الملاحظتين التاليتين الخاصتين بعلاقة التضمن :—

أولا : إن علاقة التضمن علاقة منطقية أساسية ، وهذه إحدى النتائج الهامة التى إنتهى إليها بيرس من دراسة منطق العلاقات . طالما أننا نستطيع أن نرد إليها كثيراً من العلاقات الأخرى مثل علاقة الهوية ، وكذا التساوى واللزوم وغيرها(١).

ثانياً : إن علاقة التضمن إذا ما طبقناها على مستوى الفئات ، أو على مستوى الأفراد الجزئية بالنسبة للفئات ، فإننا نحصل على علاقتين :—

١ — علاقة دخول فئة فى فئة ، ورمزنا لها من قبل بالرمز « ⊃ » .

٢ — أو علاقة دخول فرد فى فئة ، ورمزنا لها من قبل بالرمز « (̲̅— » .

ويمكننا الآن أن نقارن بين هاتين العلاقتين ، من حيث الصفات التى تتصف بها كل منهما ، وذلك كما يلى :—

---

(١) أنظر « مجموعة الأبحاث Collected Papers » لبيرس ، المجلد ٣ ، الفقرة رقم ١٦٥ ، وكذا الدراسة التى نشرها المؤلف عن كتاب « للنطق الصحيح » لبيرس فى مجلة تراث الإنسانية ، مجلد ٧ ، عدد ٢ .

أوجه الاختلاف :

العلاقة « ⊃ » : تتصف بكونها :ــ

١ ــ إنعكاسية : وهذا ما نعبر عنه بالرمز على النحو الآتى :ــ

ا ⊃ ا .

٢ ــ ومتعدية : (١) ، ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلى :ــ

(ا ⊃ ب) . (ب ⊃ ح) : ⊃ : (ا ⊃ ح)

٣ ــ وجائزة التماثل : فالصيغة (ا ⊃ ب) لاتستلزم الصيغة (ب ⊃ ا) كما أنها لا تستبعدها(٢) . وهذا مانعبر عنه رمزيا على النحو الآتى :ــ

(ا ⊃ ب) : ⊃ : (ب ⊃ ا) v (ب ⊃ اَ) .

أما العلاقة (⊆ : فتتصف بكونها :

١ ــ لا أنعكاسية : (٣) وذلك لأنها تربط بين مستويين مختلفين هما الفرد والفئة . ومن ثم فهى لاتصلح لأرتباط الفرد مع نفسه بها ، ولاتصلح كذلك لإرتباط الفئة مع نفسها بها . (٤) .

---

(١) Lee, H. : Symbolic Logic, p 55

(٢) Tarski, A, ; Introduction to Logic, P, q 8,

(٣) Lee, H, ; Symbolic Logic , P, 56,

(٤) وأن كان بعض المناطقة يرى ــ مثل كواين ــ أنها علاقة انعكاسية . فقد ذهب كواين إلىأن إضافة معنى الصيغة التالية : (س ⊆ س) هو أقرب إلى

٢ — لازمة : (١) وذلك لأننا لوقلنا :

(س ⊂ ا) . (ا ⊂ ب)

لما كان ذلك القول صحيحا ، لأن العلاقة « ⊂ » لاتربط بين الفئات ، ومن ثم فلا تربط بين ا ، ب . وعلى ذلك فإذا لم تكن المقدمات التى نبدأ منها صحيحة فإن النتيجة التى قد نحصل عليها ، ستكون هى بدورها غير صحيحة .

٣ — لاتماثلية : لأنه لو كانت س ⊂ ا ، فلا تكون ا متضمنة فى س لأن الفئة لاتكون متضمنة فى الفرد ، بل إن الفرد هو الذى يكون متضمنا فى الفئة أو منتميا إليها . أما عن التشابه بين هاتين العلاقتين فيتضح فى أن كلا منهما علاقة غير مترابطة ، فضلا عن أن كلا منهما يفيد معنى الاندراج أو التضمن :

٢ — علاقة الهوية :

وليس المقصود هنا بالهوية ، هوية فئتين أو قضيتين ، بل الهوية بين علاقتين ، بمعنى أن تكون هناك علاقة هوية تربط بين علاقتين ، أو وجود تطابق ذاتى بينهما نعبر عنه بالتساوى . فإذا كانت لدينا الصيغة التالية :—

ع = غ

= معنى الهوية بين الفرد الواحد ونفسه . وقد علق على مثل هذا الرأى «لى» بقوله : لو كانت العلاقة « ⊂ » علاقة انعكاسية ، لترتب على هذا رفض نظرية الأنماط عند رسل ، ولذا فهو يعدها لا انعكاسية .

أنظر المرجع السابق صفحة ٦٠ .

(١) المرجع السابق ، صفحة ٥٦ .

كان معنى ذلك أن العلاقتين ع ، غ فى هوية ، أو أنهما متطابقتان ذاتيا . وكما عرفنا فى حساب الفئات أن تضمن فئتين إحداهما فى الأخرى يستلزم القول بأن كلا من الفئتين مساوية للاخرى، فكذلك نقول فى حالة العلاقات أن العلاقتين تتساويان حين تكون كل منهما متضمنة فى الأخرى . ولقد عبر تارسكى عن هذا المعنى بقوله (إذا كانت ع ⊃ غ ، وكانت غ ⊃ ع ، قلنا أن العلاقتين ع ، غ إنما تقومان أو تربطان بين أشياء بعينها ، ومن ثم فهما متطابقتان ذاتيا أوهما فى هوية ، أى أن ع = غ) (١) . ومن ثم فان :

(ع ⊃ غ) . (غ ⊃ ع) : ⊃ : (ع = غ)

وبما أن ع = غ فإننا نستطيع ان نستبدل إحداهما بالأخرى فنحصل على :-

ع = ع ومن ثم على عَ = عَ وكذا ع = عً

أو غ = غ ومن ثم على غَ = غَ وكذا غ = غً

ومما هو جدير بالملاحظة أن علاقة الهوية تتصف بكونها : —

١ — انعكاسية : لأن كل علاقة ترتبط مع نفسها بعلاقة الهوية . أى أن :

ع = ع

٢ — وتماثلية : لأن : (ع = غ) ⊃ (غ = ع) .

٣ — ومتعدية : لأن : (ع = غ) (غ = ر) : ⊃ : (ع = ر) .

---

(١) Tarski, A. Introduction to Logic, p, 91

٣ ـ علاقة التباين أو الاختلاف Diversity

وتوجد بين أى علاقتين مختلفتين متميزتين مثل ع ، غ . وهذا مايعبر عنه رمزيا على النحو الآتى : ـ

ع ≠ غ

فإذا كنا قد عرفنا أن علاقة الهوية بين علاقتين ، تنشأ حين تـكون كل منهما متضمنة فى الأخرى . فإننا نستطيع تعريف علاقة التباين أو الاختلاف بأنها تلك التى تقوم بين العلاقتين اللتين لاتتضمن إحداهما الأخرى فى وقت واحد . ونحن فى هذه الحالة نعنى أحد أمرين : ـ

(ا) إما ألا يكون هناك أى تضمن بين إحداها والأخرى ، كما هو الحال بالنسبة لعلاقتى « أكبر من » ، « على يسار » . وهذا مايعبر عنه رمزيا على النحو الآتى : ـ

(ع ≠ غ) : ⊃ : -(ع ⊃ غ) . -(غ ⊃ ع) .

أو بالعكس :- (ع ⊃ غ) . - (غ ⊃ ع) : ⊃ : (ع ≠ غ) .

(ب) أو قد تـكون إحداها تتضمن الأخرى ، بدون أن يكون العكس صحيحا. كما هو الحال بالنسبة لعلاقتى « على يمين » ، « مجاور لـ » . فعلاقة « على يمين » متضمنة فى علاقة « مجاور لـ » فى حين أن العـكس غير صحيح ، إذ أن ما هو « مجاور لـ » قد يكون « على يمين » أو « على يسار » . ومن ثم فاننا نـكتب:ـ

(ع ⊃ غ) . - (غ ⊃ ع) : ⊃ : (ع ≠ غ) .

ومما هو جدير بالملاحظة أن علاقة التباين أو الاختلاف بين العلاقات ، تتصف بأنها : ـ

١ ـ تماثلية : لأنه إذا كانت ع ≠ غ ، كانت إذن غ ≠ ع

وهذا ما نعبر عنه رمزيا كما يلى : ـ

(ع ≠ غ) ⊃ (غ ≠ ع) .

وبالعكس ، أى أن : (غ ≠ ع) ⊃ (ع ≠ غ) .

٢ ـ وبأنها ليست بالعلاقة المتعدية ، طالما أن الصيغتين :

(ع ≠ غ) ، (غ ≠ ر)

لاتستلزمان الصيغة : (ع ≠ ر)[1]

إذ من الممكن أن تكون : (ع = ر) .

بل هى جائزة التعدى ، وهذا ما نعبر عنه رمزيا بالصيغة التالية :

(ع ≠ غ) . (غ ≠ ر) : ⊃ : (ع ≠ ر) v (ع = ر)

٣ ـ وبأنها علاقة مترابطة أيضاً ، وهذا ما يمكن إدراكه لأول وهلة ، لأنه بالنسبة لأى علاقتين نختارهما ، لابد وأن تكون إحداهما متميزة عن الأخرى مختلفة عنها وإلا كانت هى والأخرى شيئاً واحداً .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٨

الاستدلال الخاص بالعلاقات :

يمكن تناول الاستدلال الخاص بالعلاقات من زاويتين :ـ

أولا : من زاوية :

١ — الاستدلال على صحة قيام علاقات بين موضوعات وعلى خصائص هـــذه العلاقات فنحن نستدل مثلا على صحة :

(س ع و)

(ا) إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (ص ع و) ، وإذا كانت « ع » علاقة متعدية .

(ب) أو إذا كانت (و ع س) ، وكانت « ع » علاقة تماثلية .

٢ — أو الاستدلال على صحة قيام علاقات بين موضوعات ، هى نفسهاعلاقات

وفى الأمثلة التى أوردناها فى هذا الفصل أو فى الفصول السابقة ما يوضح هذا المعنى ، وخاصة ما يتصل بعلاقات الاندراج أو الهوية أو الاختلاف والتباين .

ثانياً : أو من زاوية قيام الاستدلال أساسا على العلاقات ، فإذا كان بيرس يعتبر أن كل ما هو منطقى إنما يرتد إلى العلاقات ، فإننا نعتبر كذلك أن كل ما هـــو إستدلالى قائم أساسا على العلاقات ، سواء كان هذا الاستدلال خاصا بحساب الفئات أو القضايا أو دالات القضايا أو كذلك بالعلاقات نفسها . وفى هـــذا الصدد تقــول إستبنج : (إن كل استدلال إنما يتوقف على الخصائص المنطقية للعلاقات ومن ثم فإن تصور « العلاقة » ، تصور أساسى جدا فى كل استدلال) (١) . ولعل هـــذا المعنى

---

(١) Stebbing, S, ; A, Modern Introduction to Logic, P, 166,

الذى نشير إليه يكون واضحا من أنواع الأستدلالات السابق ذكرها على طول هذا الكتاب ، ولعله يكون أكثر وضوحا فى الحساب التحليلى الخاص بالنظرية العامة للاستدلال ، وهو موضوع يخرج عن نطاق كتاب تمهيدى مبسط كهذا الذى بين أيدينا . ولعلنا نستطيع قريبا أن نقدم دراسة لهذه النظرية التى تعتبر بمثابة التعبير الصورى المجرد لأى بناء منطقى رمزى .

قـــائمة

بأهم الرموز المستخدمة فى الـكتاب

أولا : رموز خاصة بحساب الفئات

س ، ص ، ...	متغيرات للمفردات الجزئية .
ا ، ب ، حـ ، ..	متغيرات للفئات .
⊃	وتعنى إندراج فئة فى فئة أخرى . (ا ⊃ ب) .
∈	وتعنى إنتماء عضو واحد مفرد إلى فئة ما . (س ∈ ا)
+	وتعنى « أو » للجمع أو الفصل الضعيف بين الفئات .
(+)	وتعنى « إما ... أو » للجمع أو الفصل القوى بين الفئات .
×	للضرب المنطقى بين الفئات .
—	للطرح المنطقى بين الفئات .
اَ	لنفى الفئة ا .
اً	للنفى المزدوج للفئة ا .
=	وتعنى الهوية بين الفئات .
≠	وتعنى عدم الهوية بين الفئات أو اختلافها .
١	رمز للفئة الشاملة . (أو عالم للقال) .
صفر	رمز للفئة الفارغة .

ثانياً : رموز خاصة بحساب القضايا

ق ، ل ، م ، ...	متغيرات للقضايا .
ــ	لنفى القضية .
.	للضرب المنطقى بين القضايا .
v	وتعنى « أو » للجمع أو الفصل الضعيف .
(v̲)	وتعنى « إما ... أو » للجمع أو الفصل القوى .
≡	وتعنى التكافؤ بين القضايا .
←/→	وتعنى عدم التكافؤ .
⊃	وتعنى اللزوم بين القضايا .
ق = صفر	أى أن : ق كاذبة دائماً .
ق = ١	أى أن : ق صادقة دائماً .
ص	وتعنى الصدق فى القضية .
ك	وتعنى الكذب فى القضية .

ثالثاً : رموز خاصة بحساب الدالات

د ، ى ، ...	متغيرات الدالة .
س ، ص ، ...	رموز لمتغيرات الدالة .
(س)	رمز السور الكلى الموجب .
(E س)	رمز السور الوجودى الجزئى .
(E ١)	رمز السور الوجودى للفرد .

رابعاً : رموز خاصة بحساب العلاقات

ع ، غ ، ر ، ...	متغيرات العلاقة .
ع	نفى العلاقة .
عَ	عكس العلاقة .
∩	الضرب بين العلاقات .
∪	للجمع بين العلاقة .
/	الضرب النسبى للعلاقات .
=	وتفيد معنى الهوية بين العلاقات .
≠	وتفيد معنى الاختلاف والتباين بين العلاقات .

قائمة بأهم المراجع

أولا : المراجع العربيـــة

١ — ابن تيمية : الرد على المنطقيين .

(المطبعة القيمة فى بمباى بالهنـد عام ١٣٦٨ هجرية / ١٩٤٩ ميلادية . نشر عبد الرحمن شرف الدين الـكتبى) .

٢ — برتراند رسل : أصول الرياضيات . (الجزء الأول)

ترجمة عربيـــة بقلم : الدكتور محمد مرسى أحمد ، والدكتور أحمد فؤاد الأهوانى . (دار المعارف ، القاهرة ، ١٩٥٨) .

٣ — برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية .

ترجمة عربية بقلم : الدكتور محمد مرسى أحمد ، مراجعة الدكتور أحمد الأهوانى . (نشر مؤسسة سجل العرب ، القاهرة ١٩٦٢) .

٤ — د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى . (الجزء الأول)

(مكتبة الأنجلو المصرية ، القاهرة ، الطبعة الرابعة ١٩٦٥) .

٥ — د. عبد الرحمن بدوى : المنطق الصورى والرياضى .

(مكتبة النهضة المصرية ، القاهرة ، الطبعة الثانية ١٩٦٣) .

٦ — لدفيج فتجنشتين : رسالة منطقية فلسفية .

ترجمة عربية بقلم الدكتور عزمى إسلام . (مكتبة الأنجـلو المصرية ، القاهرة ١٩٦٨) .

٧ — يان لوكاشيفتش : نظرية القياس الأرسطية « من وجهة نظر المنطق الصورى الحديث » .

ترجمة عربية بقلم الدكتور عبد الحميد صبره . (منشأة المعارف ، الإسكندرية ، ١٩٦١) .

ثانياً : المراجع الأجنبية

1 — *Ayer, A. J.* : (editor) : Logical Positivism.
(The Free Press of Glencoe, U.S.A., 4th printing, 1963).

2 — *Bacon, F.* : Novum Organum.

3 — *Boole, G.* : Studies in Logic and Probability.
(Watts & Co., London, 1952)

4 — *Boole, G.* : The Mathematical Analysis of Logic.
(in : Studies in Logic and Probability)

5 — *Carnap, R.* : Introduction to Symbolic Logic, and its Applications.
(Dover Publications, a paperback edition, U.S.A. 1958)

6— *Carruccio, E.* : Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought.
(Faber & Faber, London, 1964).

7 — *Church, A.* : Introduction to Mathematical Logic. Vol. I.
(Princeton, New Jersey, U.S.A. Princeton University Press, 1956).

8 — *Cohen, M.* & *Nagel, E.* : An Introduction to Logic.
(Routledge & Kegan Paul, a paperback edition, 1964).

9 — *Feibleman, J.K.* : An Introduction to Peirce's Philosophy.
(George Allen & Unwin, London, 1960)

10 — *Geach* M *Black, M.*: Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.
(New York, 1952)

11 — *Hilbert, D. & Ackermann, W.* : Principles of Mathematical Logic.

(Chelsia Publishing Company, New York, 1950).

13 — *Kneale, W.* & *Kneale, M.* : The Development of Logic.
(Oxfard, at the Clarendon Press, England, 1966).

14 — *Kotarbinski T.* : Lessons sur l'Histoire de la Logique.
(Presses Universitaires De France, Paris, 1964).

15 — *Langer, S.* : An Introduction to Symbolic Logic.
(Dover Publications, 2nd Paperback edition, New York, 1953).

16 — *Lee, H.N.* : Symbolic Logic.
(Routledge & K. Poul, London, 1962)

17 — Martin, R. : Logique Contemporaine et Formalisation.
(Presses Universitaires De France, Paris, 1964).

18 — *Mourant, J.A.* : Formal Logic :
(the MacMillan Co. New York, 1963)

19 — *Quine, W.V.O.* : Mathematical Logic.
(Harvard University Press, U.S.A., 1951)

20 — *Reichenbach. H.* : Elements of Symbolic Logic.
(a paperback edition,, The Free Press, New York, 1966).

21 — *Schipper, E.W.* & *Schuh* : A First Course in Modern Logic.
(Methuen & Co. London, 7th. edition, 1950).

23 — *Tarski, A.* : Introduction to Logic, "and the Methodology of Deductive Sciences".
(Oxford University Press, New York, 8 th. printing, 1959).

24 — *Venn, J.* : Symbolic Logic.
(London, 1881).

كتب أخرى للمؤلف :

١ — چون لوك — دار المعارف ، القاهرة ١٩٦٤ .

٢ — لدفيج فتجنشتين — دار المعارف ، القاهرة ١٩٦٧ .

٣ — رسالة منطقية فلسفية . (لدفيج فتجنشتين) ترجمة عربية — الأنجلو المصرية ، القاهرة ١٩٦٨ .

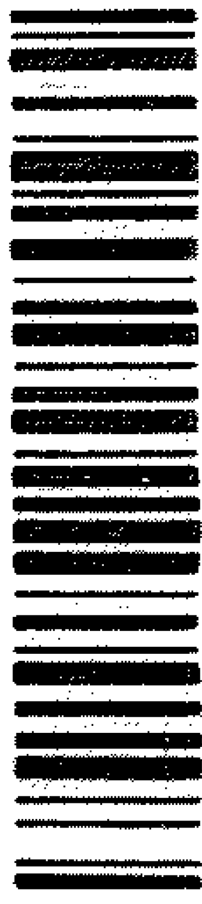
تصويبات الرموز

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٣٦	١٨	ا ب	اَ بَ
٤٤	١١	$\overline{(\text{ا} + \text{بَ})}$	$\overline{(\text{ا} + \text{ب})}$
٦٦	٨	(ا ں ح)	(ح ⊃ ى)
٨٩	الأخير	ا ب	اَ ب
٩٥	١٠	ا ب	ا بَ
٩٦	الأخير	≡	⊃
١٠١	٤	ا	١
١٠٦	٩	لا ا هى ب	لا ا هى بَ
١٠٦	١٢	بَ ا = صفر	بَ اَ = صفر
١٠٧	٨	هى ا	هى اَ
١٠٨	١٠	هى ا	هى اَ
١١٠	٤	س (ـ (≡) اَ)	ـ (س (≡) اَ)
١١١	٨	⊃ (ا	⊃ ـ (ا
١٢٤	٥	ا	١
١٢٦	١٠	ا ب/ حَ + ا بَ/ حَ	ا ب حَ + ا بَ حَ
١٢٧	١٠	ا ب/ ح	ا ب ح
١٢٨	١٠	ا بَ/ ح	ا بَ ح

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٣١	الأخير	ب حـ	ب حـَ
١٣٥	١٤	(حـ + حـ)	(حـ + حـَ)
١٣٦	١٨	ا ب حـ	ا ب حـَ
١٣٧	٩	= ١ ×	١ × ١ = ا
١٣٧	١٣	ا = صفر	اَ = صفر
١٥٦	الأخير	= ا	= ١
١٥٧	١٣	ن ن	ن . ن
١٦٨	٥	ل	ـ ل
١٧٣	١٢	م ⊃ ن	م ⊃ ـ ن
١٨٨	١	(ـ ل . م)	ـ (ل . م)
١٩١	٧	(ن ٧ ل)	ـ (ن ٧ ل)
٢٤٠	العمود ٦	ضع ك بدلا من ص في جميع القيم	
٢٨٨	١٣	د س) » .	ى س) » .
٢٨٨	١٦	د س	ى س
٢٨٨	١٧	. د س)	. ى س)
٢٩٤	٤	ى	د
٢٩٤	٥	ى	د
٢٩٧	٦	د ص	ى ص
٣٠٧	٤	ى س	ـ ى س
٣٠٧	١١	(∃ س)	ـ (∃ س)
٣٢١	٧	هـ س . ى س	هـ س . ـ ى س

رقم الايداع بدار الكتب ٢١٨٩ لسنة ١٩٧٠

مطابع سجل العرب
شارع بستان الدكة - ٩ عماد الدين : القاهرة
تليفون - ٩٣٢٧٠٦


Bibliotheca Alexandrina
0647001